世界数学



连续统假设

辽宁教育出版社

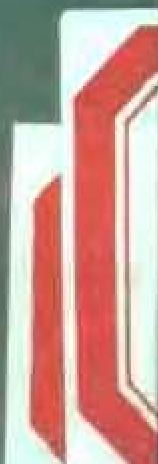
名题欣赏

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com



责任编辑：俞晓群
谭 坚
封面设计：安今生



ISBN 7 - 5382 - 04[illegible]

定 价：3[illegible]

世界数学名题欣赏丛书

连续统假设

张锦文
王雪生 著

辽宁教育出版社



连续统假设

张锦文　王雪生　著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　丹东印刷厂印刷

字数：126,000　开本：787×1092 1/32　印张：9　插页：4
印数：1,001—3,500
1989年4月第1版　　1989年11月第2次印刷

责任编辑：俞晓群　谭　坚　　责任校对：王淑芬
封面设计：安今生

ISBN 7-5382-0436-9/G·445
定　价：3.30 元

世界数学名题
欣赏丛书

费马猜想
黎曼猜想
连续统假设
希尔伯特第十问题
欧几里得第五公设
哥德尔不完全性定理
不动点定理
无处可微的连续函数
柯克曼女生问题
斐波那契数列
哥德巴赫猜想
置换多项式及其应用
素数判定与大数分解





作者简介

张锦文(左)，1930年生于河南辉县，1959年毕业于北京大学数力系数学专业数理逻辑专门化，现任中国科学院软件研究所副研究员。著作有《集合论与连续统假设浅说》(上海教育出版社，1980)、《集合论浅说》(科学出版社，1984)、《集合论学习手册》(中央广播电视大学出版社，1984)、《布尔代数》(与廖钼纬合著，科学出版社，1984)、《离散数学导论》(与沈瑞民合著，天津科学技术出版社，1986)等，70余万字。论文37篇，约21万字。主要从事公理集合论与智能逻辑的研究工作。

王雪生，1934年生于河南灵宝，1956年毕业于新乡师范学院数学系，现任河南师范大学数学副教授。已发表论文5篇，从事数学教学工作。

内容简介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。连续统假设是19世纪数学家康托尔提出的一个著名的数学问题。这一问题的提出，对整个数学领域产生了深远的影响。1900年，在巴黎数学家大会上，希尔伯特把连续统假设列为著名演讲《数学问题》中的第一个问题，并盛赞它的重要作用。因此，人们又把它称为“希尔伯特第一问题”。本书采取历史叙述、夹叙夹议的手法，回顾了连续统假设产生的历史渊源，介绍了有关知识，以及它在数学领域中的地位、作用和意义。全书思想性强，兼有较高的学习价值和科学欣赏价值。

Summary

This book is one of "A Series of Appreciation of Mathematical Topics in World". Since continuum hypothesis a famous mathematical problem was pointed by mathematician G. Cantor, tremendous influence in mathematics has happened. In 1900 Hilbert posed the continuum hypothesis as the first problem in his famous report "Mathematical Problems" at the Conference of Mathematician in Paris and praised its important functions. Hence people also call it "Hilbert's first problem".

In this book, we review the historic origin of the occurence of continuum hypothesis and introduce related knowledge and its situation, functions and significance in mathematics by means of historic statements, description and discussion one after another. This book is worth studying and scientific appreciating because it has strict logicality and is varied and interesting.

序

数学中重大的难题的提出与解决，常常是数学发展的里程碑。连续统假设是当代数学中最困难最著名的问题之一，它同其它数学难题一样，是数学发展中的必然产物，这一问题已有一百多年的历史了，虽然已取得重大的进展，然而至今尚未解决。连续统问题同其它数学难题的不同在于它更基本、更广阔。所谓更基本表现在两点上，它是直线上点有多少的问题；它来源于号称数学基础的集合论，数学是无穷的数学，你承认实无穷总体吗？若是，必然产生连续统问题。所谓更广阔的含义：一是连续统来源于物理与几何这样广阔的领域，对此，爱因斯坦、希尔伯特都有过论述；二是连续统假设涉及到现代数学的许多分支，涉及到数百个数学问题的真伪性问题，其中也有广义连续统假设蕴涵选择公理，而后者几

乎涉及一切数学分支以及其中许多著名问题；三是在研究连续统假设的过程中，人们创造了可构成法、力迫法这样强有力的科学方法，它们在许多领域内有了重要的应用，促使若干长期悬而未决的问题取得了重大进展。正因为如此，就决定了本书的基本内容。

本书第一章考察康托尔之前的二千多年内（古代中国与古代希腊以及近代欧洲）的数学家、哲学家关于无穷的论述，从而说明康托尔数学思想的革命性和集合论创立的历史必然性；这也是对连续统假设的历史背景所作的说明。第二、三章概述康托尔的理论，从而可以较准确地弄清连续统假设的含义。第四章阐述连续统假设的确切定义、意义、等价命题及其若干推论。第五章阐述慧尼定理及其对连续统假设的结论。第六章着重阐述著名的数学思想家罗素的逻辑类型论和他对连续统假设的论述。逻辑类型论对于连续统假设、集合论乃至整个数学的进展都有值得注意影响。第七章概述希尔伯特方案，这一方案的目的在于保卫古典数学，保卫人们研究实无穷的权利和已取得的丰硕成果.它阐述的形式数学、直观数学及它们的相互联系正是当今研究集合论基地。第八章概述由蔡梅罗首先创立后经弗兰克

尔、斯科伦改进的集合论公理系统ZF.第九章概述哥德尔关于连续统假设相对于ZF公理系统的协调性证明。第九章简要说明科恩的相对独立性证明，直观地说明这一证明中的主要方法——力迫法与脱殊集合，这些概念都涉及到形式系统的本质。最后，第十一章，我们详细论述连续统假设还是一大难题，而这一观点是哥德尔在科恩结果的十五年前就已经预见到和论述过的。我们详细地引证了哥德尔的这些深刻的观点，借以说明连续统假设仍然是数学中特别是集合论中的中心问题之一，以及解决它的过程必将促进公理集合论的重大发展，创造新的方法，获得新的公理。

在连续统假设的史前，围绕肯定实无穷与否定实无穷的争论中，在现代数学开拓者康托尔提出连续统假设后，围绕连续统假设意义的论述中，以及在它的研究发展中都有一批著名数学家、逻辑学家和数学思想家论及这一问题，有的对于连续统假设的研究作出重大贡献。对于他们的思想，本书力图作出科学的说明，我们概述了亚里士多德、伽利略、高斯、波尔查诺、维尔斯特拉斯、戴德金等人的主要观点；着重阐述了著名数学思想家希尔伯特、罗素、策梅罗和哥德尔的思想、方法和影响，特别是亚里士多德后的最

伟大的逻辑学家哥德尔的思想，我们力争作出详细的阐述。

我曾在文献〔2〕中通俗地说明连续统假设相对于通常的集合论公理系统的不可判定性结果，并着重说明用现有的工具（通常的集合论公理系统与方法）是不足以解决该问题的真伪性问题的，正如用圆规直尺不足以解决三等分任意角一样。近几年内仍然有一些朋友从不同的角度给出了连续统假设的“证明”或“否证”，甚至宣布他已给出“连续统假设的证明”、或者宣布他已给出“否证连续统假设的证明”。而这些“证明”所使用的方法都没有超出现有的工具，当然，这些都是不能成立的。对于那些愿为连续统问题作出贡献的朋友，我恳切地希望他们能认真地分析一下这一问题的来龙去脉，透彻地了解它的进展，特别是在这些进展中、在取得这些进展所使用的方法中所蕴涵着的思想、观点和方法。在已有的基础上创立超出原有的工具并胜任解决这一问题的新工具，只有这样才有解决这一问题的可能。众所周知，连续统问题是深刻的，它的意义是深远的，解决它要付出巨大的努力，正如希尔伯特在《数学问题》一文中所说，“某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个

人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示独立发展的衰亡或中止。正如人类的每项事业都追求确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔的自由的境界”。连续统问题已经历了一百多年了，虽然没有解决，但是已经取得了若干重大进展。我们相信，人类终归要解决它的，人们期待着它的早日解决，在解决它的过程中必将发现新公理、新方法，必将创造新方法，使人类达到更广阔、更自由的境界。

限于水平，错误之处在所难免，欢迎批评指正。

张锦文

1986年8月16日

目　录

序

一　潜无穷与实无穷……………………………………1
1．古代中国学者的认识……………………4
2．古希腊学者的认识……………………7
3．存在着已完成的无穷整体吗？………12
4．无穷概念的发展……………………14
5．两种无穷观…………………………20
6．无穷集合…………………………24
7．历史注记…………………………26

二　无穷集合的分类……………………………31

1. 一一对应……33
2. 集合的势……36
3. 可数集合……39
4. 实数集合是不可数的……47
5. 更大的无穷集合……52
6. 历史注记……55

三 序数与基数……57
1. 序数……61
2. 基数……70
3. 基数的初等运算……74

四 什么是连续统假设……83
1. 康托尔猜想……87
2. 广义连续统假设……90
3. 希尔伯特的评价……91
4. 希尔伯特的失误与启示……94
5. 等价命题与推论……97

五 蔻尼对$2^{\aleph_0}$的限制……103
1. 共尾序数……106
2. 蔻尼定理……111
3、蔻尼定理的推论……116

六　类型论…………………………………… 121
1. 康托尔-布拉里·弗蒂-罗素
悖论…………………………………… 123
2. 简单类型论………………………… 127
3. 理查德悖论………………………… 134
4. 分支类型论………………………… 136
5. 类型论的影响……………………… 140
6. 历史注记…………………………… 140

七　希尔伯特方案………………………… 143
1. 历史背景…………………………… 145
2. 实无穷与理想元素………………… 150
3. 从相对协调性到元数学…………… 154
4. 希尔伯特方案的基本内容………… 155
5. 形式系统…………………………… 157
6. 有穷方法…………………………… 160
7. 希氏方案的影响…………………… 162
8. 历史注记…………………………… 164

八　集合论的 ZF 公理系统 ……………… 167
1. ZF 的形式语言 …………………… 172
2. 逻辑公理和推理规则……………… 177

3. ZF公理系统 …… 181
4. ZFC的协调性 …… 189
5. 历史注记 …… 195

九 连续统假设的相对协调性 …… 197
1. 协调性与相对协调性 …… 199
2. 可定义子集合 …… 204
3. 可构成集合 …… 206
4. ZF的每一公理都在L中成立 …… 210
5. 可构成公理在L中成立 …… 214
6. 在ZF中可证明 $V=L\rightarrow AC\wedge CH$ …… 218

十 连续统假设的相对独立性 …… 225
1. 初始模型 …… 227
2. 力迫关系与脱殊集合 …… 229
3. 脱殊集合的性质 …… 234
4. CH不成立的模型 …… 235
5. 力迫方法浅释 …… 238
6. 莱文海姆—斯科伦定理浅释 …… 240

十一 CH还是一大难题 …… 245
1. ZF系统的不完全性 …… 247
2. 问题并未解决 …… 249

3. 连续统问题与集合论新公理………250

十二 结束语………255

参考文献………259

人名索引………261

Contents

Preface

Chapter I. Potential infinity and actual infinity 1

1. Knowledge of ancient Chinese scholars 4
2. Knowledge of ancient Grecian scholars 7
3. Does there exist actual infinite totality accomplished? 12
4. Developments of infinite concepts···14
5. Two views on infinity 20
6. Infinite sets 24
7. Historic remark 26

Chapter I. Classifications of infinite

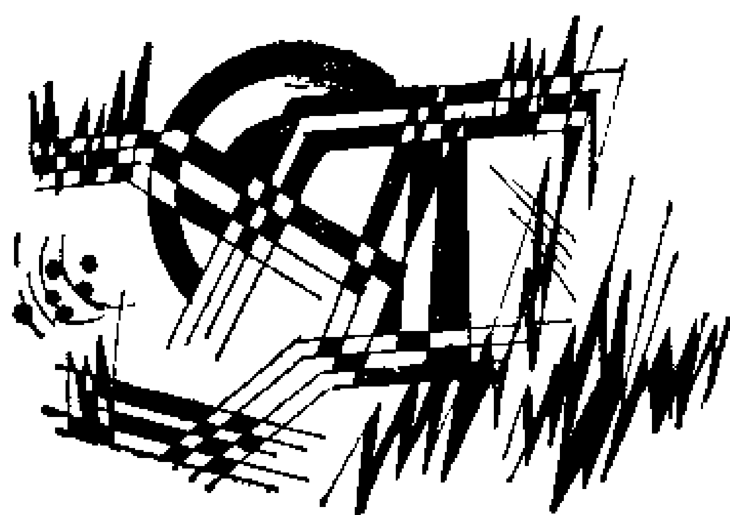
sets ……………………………………………31
1. One to one correspondence ………33
2. Cardinal number of set ……………36
3. Countable sets ………………………39
4. Real number set is nonenumera-
ble ………………………………………47
5. More infinite sets …………………52
6. Historic remark ……………………55
Chapter Ⅲ. Ordinal numbers and cardinal
numbers ………………………………57
1. Ordinal numbers ……………………61
2. Cardinal numbers……………………70
3. Elementary operations of cardinal
numbers ………………………………74
Chapter Ⅳ. What is continuum
hypothesis? …………………………83
1. Cantor conjecture……………………87
2. Generalized continuum
hypothesis ……………………………90
3. Hilbert evaluation …………………91
4. Hilbert error and
enlightenment ………………………94
5. Equivalent propositions and coro-

llary 97
Chapter Ⅴ.Connie's restrictions on $2^{\aleph_0}$ ... 103
1. Cofintal ordinal numbers 106
2. Connie theorem......................... 111
3. Corollary of Connie theorem...... 116
Chapter Ⅵ. Type theory 121
1. Cantor-Burali-Forti-Russell
paradox 123
2. Simple type theory 127
3. Richard paradox 134
4. Branched type theory 136
5. Influence of type theory 140
6. Historic remark 140
Chapter Ⅶ. Hilbert program 143
1. Historic background 145
2. actual infinity and ideal element
at infinity 150
3. From consistency to metamathe-
matics..................................... 154
4. Basic contents of Hilbert
program 155
5. Formal system 157
6. Finite methods 160

7. Influence of Hilbert program … 162
8. Historic remark …… 164
Chapter Ⅷ. ZF axiom system on set theory …… 167
1. Formal language on ZF …… 172
2. Logic axiom and deduction principle …… 177
3. ZF axiom system …… 181
4. Consistency of ZFC …… 189
5. Historic remark …… 195
Chapter Ⅸ. Relative consistency on continuum hypothesis …… 197
1. Consistency and relative consistency …… 199
2. Definable subsets …… 204
3. Constructible sets …… 206
4. Every axiom of ZF is true in L …… 210
5. Constructible axiom is true in L …… 214
6. $V=L\to AC\wedge CH$ can be proved in ZF …… 218
Chapter Ⅹ. Relative independence on con-

tinuum hypothesis ……………… 225
1. Initial model…………………… 227
2. Force relations and generic sets…229
3. properties of generic sets ……… 234
4. A model for CH to be false…… 235
5. Simple explanations on force
methods ……………………………… 238
6. Simple explanations cf Löwenheim-
Skolem theorem…………………… 240
Chapter Ⅺ. CH is also a very difficult
problem ……………………………… 245
1. Incompleteness of ZF system … 247
2. The problem is not solved yet… 249
3. Continuum problems and new
axioms on set theory…………… 250
Chaptdr Ⅻ. Epilogue …………………… 255
References ……………………………………… 259
Biographic index ………………………………… 261

一 潜无穷与实无穷



无穷和有穷是两个对立的概念，无穷是相对于有穷而言的。数学中的无穷主要是指无穷过程，无始无终，或有始无终，或有终无始；无限大，不能被任意大的实数所超越；无限小，它大于零，但小于任意的正实数；无穷整体，即无穷集合，包括无穷序数和无穷基数。

数学是无穷的数学，无穷概念的发展不断地推动着数学的发展。然而，什么是无穷呢？如何理解无穷呢？从古到今，一直是数学家和哲学家长期争论和关注的问题。

本章我们打算从古代中国、古希腊以及牛顿、莱布尼兹和他们之后的一些著名的思想家、数学家的论述出发，考察集合论的史前思想史，进而阐述现代数学的奠基者康托尔的基本观点。康托尔的思想是革命的，不朽的。

1. 古代中国学者的认识

中国数学在世界数学的发展过程中占有重要的地位，中国数学对世界数学的发展作出过重大的贡献。关于数学中的无穷概念，有过精辟的论述。

早在公元前四世纪，我国墨子学派在现有传本《墨子》一书的“经上”，“经说上”，“经下”和“经说下”四篇中，就记载着有关无穷的经文。“经上”和“经下”是给出一些概念的定义，“经说上”和“经说下”是对各条经文的补充说明。

1）〔经〕穷，或有前不容尺。

〔说〕穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。

其中“或”为古代域字，指区域。

〔经〕的意思是说：有穷的距离，或有前的距离，用尺一尺接一尺地去量它，量到某一次之后，剩下的距离不会超过一尺，这是关于有穷的定义。

〔说〕是对于有穷与无穷的补充说明，其意思是说，用尺一次接一次去量某个距离，如果量到

某一次之后所剩下的不超过一尺，就叫有穷；如果量到任何一次之后所剩下的总超过一尺，就叫无穷。

这里涉及到无穷过程与无穷大量。顺便指出，墨家的论述与阿基米德公理十分相似。把〔经〕中所述用近代数学语言表达出来，就是：

任意有穷的距离 l，用长度为 e 的尺一次接一次地去量它，一定存在着一个数（自然数）n，使得

$$0<l-ne\leqslant e$$

即 $$ne<l\leqslant(n+1)e$$

这就是阿基米德公理。因此，阿基米德公理应叫做墨翟——阿基米德公理，才更符合历史事实，因为墨翟比阿基米德要早约二百年。

2）〔经〕非半弗斱则不动，说在端。

〔说〕非：斱半进前取也，前则中无为半，犹端也。前后取则端中也。斱必半，毋与非半，不可斱也。

“斱”有分割的意义。经文的意思是说，取一物平分为两个一半，又将前面的一半平分为两个一半，这样继续分割下去，势必分到一个不可再分的“端”。墨经中所说的端就是现代几何学中的点。〔说〕中进一步补充说明：如果弃掉前后

的部分而保留中间的一半，那末，这个不可分割的“端”将留在中间。这条经文没有指出这个被分割的东西究竟有多少“端”，或者说一条线段究竟有多少点，但从其叙述可以看出，不可分割的“端”应该是有穷的。这条经文所论及的思想，和古希腊哲学家德谟克利特的原子学说有些类似。

后期的墨家学派对上述问题又提出了不同的看法。《庄子·天下篇》列举了桓团、公孙龙等辩论者提出的论题有二十三条，其中之一是：

一尺之棰，日取其半，万世不竭。

这就是说，一尺长的木棒，第一日弃掉半尺，第二日弃掉剩下的半尺的一半，即弃掉四分之一尺。这样继续下去，永远也弃掉不完。

这种观点与古希腊哲学家芝诺的“对分”论题意义相似。芝诺认为：人们在有限时间里不能走过无穷多的点。因为人们在通过一定距离之前，必须先走过这距离的一半，要通过它又必须走过它的一半，由此类推以至无穷。如果线段是由无穷多个点组成的，那末，在有限的时间里走完一个线段是不可能的。

将剩下的距离排列起来，得到一无穷序列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\cdots\cdots$$

因此，这里论及了无穷过程，也论及了无限小量。

魏晋时代的刘徽，在他的《九章算术注》方田章圆田术中，创造割圆术来计算圆周率。他首先肯定圆内接正多边形的面积小于圆的面积，如果用圆内接正多边形的面积去代替圆的面积，则必有所失。但是他说："割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失也。"这就是说，将正多边形的边数屡次加倍，从而它的面积增大，边数越多，则正多边形的面积越接近于圆的面积。边数无限增多，则正多边形的面积就与圆的面积一样大。

这一段精采的论述，不仅涉及到无穷过程，无限大与无限小，而且还显示出了刘徽已具有实无限思想的萌芽。

2. 古希腊学者的认识

希腊人在数学史上占有极其重要的地位。他们所创造的数学，对现代数学的发展有深远的影

响，并且对现代数学的奠基具有重要作用。

古希腊的哲学家和数学家是怎样看待无穷的呢？

有一位辩论家，为了让人们相信“宇宙是无穷的”，他辩论时说，如果宇宙是有穷的，那末，它就一定要有边缘。一位旅行者来到宇宙的边缘，把他手中的拐杖掷出宇宙，然后走到拐杖的外端，捡起拐杖，再掷出去，这样继续下去，就把宇宙扩大了。可见宇宙是无穷的。

毕达哥拉斯派所说的数仅指整数，他们与我们现在的观点不同，他们允许使用两个整数的比，但不承认两个整数之比是数，即不承认分数是数。因此，当他们发现有些比——例如等腰直角三角形的斜边与一直角边的比——不能用整数之比表达时，就感到惊恐不安，因为这一发现否定了毕得哥拉斯派的信条：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。

毕达哥拉斯派称能用整数之比表达的比为可公度比，意思就是相比的两个量可以用公共度量单位量尽，而把不能用整数之比表达的比叫做不可公度比。因为他们不承认无理数是数，从而也就无法表达不可公度的比了。在发现不可公度比的存在之前，他们是把数与几何量等同起来的，

不可公度比的存在推翻了这种等同观点，发现者便犯下不可饶恕的“罪行”．后人把不可公度比的发现归功于米太旁登的希帕苏斯（公元前五世纪）．相传当时毕得哥拉斯派的人正在海上，当希帕苏斯把这一发现告诉大家以后，因为他在宇宙间搞了这样一个东西与其信条相违背，就把他投到海里，葬身鱼腹．可见斗争的激烈程度．

希腊人把数看做是离散的，几何量看做是连续的．不可公度比的发现，迫使希腊数学家必须解决一个难题：连续与离散的关系，即几何量与数的关系．现代数学表明：搞清楚实数与直线上点的关系，依赖于无穷的概念．希腊人似乎有所领悟，因此他们十分注重对无限小，无限大和无穷过程的讨论，但又百思不解，“望而生畏”．毕得哥拉斯派把善与恶同有穷和无穷联系起来．亚里士多德说无穷是不完美的，是未完成的，因而是不可思议的；它是不成型的、混乱的，只有那些限定分明的东西才有其本性可言．

芝诺对无穷的论述更引人入胜，他提出了：

1）“对分”论题，如前所述．

2）神行太保阿其里与乌龟赛跑的论题：跑得最快的阿其里追不上在他前面跑得最慢的乌龟．因为阿其里必须先到达乌龟的出发点，这时

乌龟又跑在阿其里的前面，这样继续下去，乌龟总在阿其里的前面，阿其里永远也赶不上乌龟。

这种论点与他的“对分”论题是一致的，所不同的只是不必把所通过的距离一再平分。芝诺论题的实质是要说明：如果空间无限可分，有限长度就含有无穷多个点，那末，在有限时间内就不能通过有限长度。

亚里士多德批驳芝诺的论点。他认为关于一个事物的无限性有两种意义：无限可分或无限宽广，在有限时间内可以接触从可分意义上是无限的东西，因而从这个意义上讲，时间也是无限的，所以在有限的时间内可以通过有限的长度，阿其里在有限的时间内可以追上乌龟。

点和线的关系令人困惑。亚里士多德说，点不可分，然而占有位置。这样一来，不管聚集起多少点，还总是聚不成线，而线段是能分的量。因此，点不能形成象线这类连续的量，点与点不能自己连续在一起。他说一点好比时间中的“此刻”（现在），此刻不可分，因而并非时间的一部分。一点可能是一线的终端，始端或其上的分界处，但它不是线的一部分，也不成其为量。一点只能通过运动才能产生一线，从而成其为量的本源。他说点没有长度，因此，如果一线由点组

成，则它将没有长度。同样，如果时间由瞬刻组成，则就没有整个的时段了。总之，亚里士多德的主张的实质是：点与数是离散的量，必需同几何上的连续量区别开来。

亚里士多德的无穷观表现在：他认为自然数（集合）是无穷的，原因在于任何一个自然数加上一以后，仍然是一个自然数；地球如果有一个突然的开始，那末，它的年龄是无限的，但任何一个时刻都不是无限的；空间是无穷的，因为它能反复不断地细分；时间在两个方向上都是无限的，但任何一个时刻都不是无限的。

欧几里得在其名著几何《原本》中明确指出："一线的两端是点"以及"把有限长直线沿直线延长（是可能的）"。这就是说，欧几里得所指的直线或曲线总是有限长度的。《原本》里没有延伸到无穷远的直线，只是考虑可以无限延长的直线。

德谟克利特主张：世界是由无穷多个简单的、永恒的原子组成的。这些原子的形状、大小、次序和位置各有差异，但每个物体都是由这些原子以某种方式组合而成的。虽然几何上的量是无限可分的，但原子是终极的、不可分的质点（原子的希腊文 *atom* 的意思是不可分）。前面

已经指出，我国古代墨经中的一条经文所阐述的观点，与这种原子论是相似的。

3. 存在着已完成的无穷整体吗？

欧氏《原本》的注释家普洛克拉斯注意到圆的一根直径分圆为两个半圆。由于圆的直径有无穷多，所以必有两倍那么多的半圆。普洛克拉斯说，对于许多人来讲这是一个矛盾。怎样解释这一矛盾呢？他认为：任何人只能说很大很大数目的直径或半圆，而不能说一个实实在在无穷多的直径或半圆。不然的话，就会出现两倍无穷大等于一个无穷大的问题。

17世纪的伽利略把普洛克拉斯的发现提得更加明确。他注意到无穷整体能和它的真正部分之间建立一一对应关系，也就是说它们有某种相等的性质。例如

1）正整数可以和它的平方数构成一一对应：

1 2 3 … n ……

↕ ↕ ↕ ↕

1 4 9 … n^2 ……

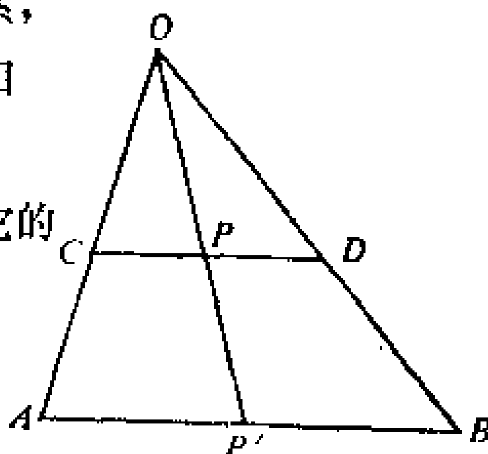


图1.1

而后者是前者的一个真正部分。

2）两个不等长的线段 AB 和 CD，如图1.1所示。CD 可以看做是AB的一部分。但是从O点作射线，分别与CD 和AB相交于 P，P'，让 P 与 P' 对应，则在AB与CD 之间构成一一对应，从而可以想象AB和CD含有同样多的点。当人们注意到“整体大于部分”这一公理时，上述相等性又是不可能的了。到底是相等还是不相等呢？或者说，是否存在无穷整体呢？伽利略意识到了无穷整体，但又困惑不解。

高斯不承认无穷整体的存在性。1831年7月12日在给舒麦彻的信中，他明确表示：“我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中从来是不允许的。无穷只是一种说话的方式，当人们确切地说到极限时，是指某些比值可以任意地接近它，而另一些则允许无限制地增加”。

波尔查诺积极维护实在无穷整体的存在性，并且强调了两个无穷总体的等价概念，即两个无穷总体之间的一一对应关系。这个等价概念既适用于无穷整体，又适用于有穷整体。两个等价的无穷整体，可以认为是“相等的”。他特别注意到无穷整体能和它的真正部分等价。对于前人困惑不解的问题，他作了肯定的回答，主张必须承

认这一事实。例如，区间〔0，5〕上的实数，可以通过公式$y=8x/5$，与区间〔0，8〕上的实数建立一一对应，虽然前者是后者的真正部分。

总之，普洛克拉斯对于无穷总体持否定态度，伽利略想肯定，但又困惑不解。高斯坚决反对，而波尔查诺承认实在无穷整体的存在性，并建立了等价概念。

4. 无穷概念的发展

17世纪中叶，牛顿和莱布尼兹创立的微积分中，应用了无限小（增量）的概念，并且在推理过程中，有时把"无限小"理解为实实在在的无限小，遇到了逻辑上的困难，惹起了对无限小的讨论，也招来了唯心主义的攻击。在无穷级数求和问题上同样也遇到困难。为了解决这些问题，人们进行了长期不懈的努力，从各个方面展开研究。到19世纪30年代，哥西弄清了极限、收敛等基本概念，建立了极限理论，给数学分析建立了基础。极限理论使得人们通过是否收敛，对无穷过程有了本质的认识，掌握了它的规律。极限理论对无限小量给出了明确的说明，无

限小量是一个变量，在变化过程中，它的绝对值可以变到任意小，而且以后永远保持任意小。简短地说，无限小量是以零为极限的变量。他在1823年的著作《代数分析教程》的序言中明确指出："当一个变量的数值这样地无限减小，使之收敛到极限零，那末，人们就说这个变量成为无限小。当变量的数值这样地无限增大，使该变量收敛到极限∞，那末，该变量就成为无限大。"但是这里的"∞"不是一个固定的量，而只是无限变大的量。

维尔斯特拉斯发展与完善了哥西的思想，避免使用无限小、无限大等概念，创立了现代数学分析中流行的 ε—δ 语言，对分析学中的一些基本概念，如极限、收敛和连续以精确化的描述。例如函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续的定义是：

任给一个数 $\varepsilon>0$，总存在着一个数 $\delta>0$，

使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，永有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是连续的。

从此以后，实无限小在分析领域销声匿迹，极限理论在分析学中占据统治地位。

19世纪分析学的严密化是否真的排除了实无穷概念呢？没有，因为一切都是建立在实数系统的基础上的。因此，微积分的严密化归结为实

数系统的建立了。

数学史上最使人惊奇的事实之一，是实数系的逻辑基础竟迟至19世纪后叶才建立起来。在那以前，即使正负有理数与无理数的最简单性质也没有逻辑地建立。鉴于代数与分析的广泛发展都用到实数，而实数的精确结构和性质却没有人考虑过，这一事实说明数学的进展是怎样地不合逻辑。分析的严密化促使人们认识到：对于数系缺乏清晰的理解这件事本身非补救不可，而理解数系，无理数是主要难点。

分析学的奠基者们，主要是维尔斯特拉斯、戴德金和康托尔就集中精力去建立实数概念。这样一来，实无穷概念获得了充分发展。

实数的各种理论实质上都是十分类似的。首先都假定有理数系已经建立，其次都要用到实无穷总体的概念。

维尔斯特拉斯和康托尔是用有理数序列定义实数的，说法不同，但方式类似，概括地说，如果一有理数序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots \tag{1.1}$$

（即其中的每个 a_i 都是有理数）满足如下的条件：

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+m}-a_n)=0 \tag{1.2}$$

即对于任何一个给定的正有理数ε，总存在着一个自然数N，使得当$n>N$时，对于任意的自然数m，都有

$$|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon$$

则称这一有理数序列为基本序列。每一个有理数基本序列定义一个实数。(1.1) 定义的实数用a表示之。

如果另外一个有理数序列

$$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,\cdots\cdots$$

满足条件

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$$

则它与 (1.1) 定义出同一个实数a。因此，有理数基本序列就分成若干等价类，每一等价类确定一个实数。

基本序列是什么？显然，它是一个实无穷总体，或称一无穷集合。这样一来，一个无理数（特别是超越数）乃是一无穷集合。有极限或收敛只是一种圆衬的说法，是为了锦上添花罢了。

用同样的方式可以定义实数的大小顺序$a<b$，及实数的四则运算。特别是他们证明了：如果

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

是一实数的基本序列，即a_i都是实数，且对于任

意的自然数m，式（1，2）一致地成立，则必有一个唯一的实数a，是由此序列确定的，即$\lim_{n\to\infty}a_n=a$。这就是说，实数的基本序列只能产生实数，不象有理数基本序列那样能产生出新的数——无理数。从这个意义上来说，实数系是一个完备系。

戴德金把所有的有理数划分为两类A_1和A_2，下类A_1中每一有理数都小于上类A_2中任一有理数，并用（A_1，A_2）表示这一划分。在一个划分中，如果A_1有最大数，或者A_2有最小数，则这一划分就没有产生新的数。例如，设A_1是小于等于2的有理数类，A_2是大于2的有理数类，则划分(A_1,A_2)确定的数就是有理数2。但是，有些划分则不是这样，譬如说，把所有的负有理数及非负的但平方小于2的有理数作为下类A_1，剩下的有理数作为上类A_2。那末，不难证明：在这个划分中A_1没有最大数，A_2没有最小数，这个划分确定了一个新的数，即$\sqrt{2}$。通过这样一个划分，“我们创造出一个新的无理数a来，它是完全由这个划分确定的。我们说，这个划分产生了数a，或者说数a对应于这个划分。”从而对应于每一个戴德金划分，存在着唯一的一个数，有理数或无理数。

在戴德金划分中，总是把有理数分成两个已完成了的无穷整体，即无穷集合。换言之，他运用并发展了实无穷的概念。

无穷集合是康托尔最先提出的一个概念。把人们直观的或思维的确定而且能区分的对象，搜集起来作成为一个整体。康托尔称这个整体为集合。组成集合的对象为元素。当一个元素 a 属于集合 S 时，记做 $a\in S$（读为 a 属于 S），当 a 不属于集合 S 时，记做 $a\notin S$（读为 a 不属于 S）。

当一个集合的元素的数目是某一自然数时，称为有穷集合，否则就称为无穷集合。无穷集合是一个完成了的整体，因而是一个实实在在的无穷总体。

康托尔对实无穷概念的发展，我们在本书中还要用更多的篇幅给以论述。这里应该指出，康托尔的著作及其观点，遭到了当时一些著名的数学家、哲学家及宗教势力的指责和攻击。宗教神学认为只有上帝是无穷的，康托尔研究无穷，建立了那么多无穷集合，贬低了上帝，岂能容忍。数学家中，攻击康托尔最强烈的不是别人，而是他的老师、专横跋扈的柯朗尼克。柯朗尼克是一个有穷论者和构造论者，他有一句名言："上帝创造了自然数，其它一切都是人造的。"他认为

除了由自然数经过有穷步骤推出的事实外，其它一概是无效的、可疑的。他反对任何自然数的无穷体系，甚至不承认无理数，说无理数是根本不存在的。他不仅反对集合论，也反对函数论。

另一位著名的数学家庞加莱把康托尔的集合论当作一个有趣的“病理学的情形”来谈论。他在1908年的一篇文章中说：“下一代人将把（康托尔）的集合论当作一种疾病，而且人们已经从中恢复过来了。”他以领袖人物的口气警告大家：“我个人，而且不只是我一个人，认为重要之点在于，切勿引进一些不能用有限个文字去完全定义好的东西。”由于各方面权威人士的压力，使康托尔曾一度患了精神崩溃症。

然而历史的发展说明，以无穷集合为对象的康托尔集合论，不仅不是什么疾病，而是现代数学的出发点，是康托尔为数学家们创造的乐园。如果不承认无穷集合，那末，无理数也不能接受，现代数学还剩下什么呢？

5．两种无穷观

如前所述，早在古希腊时代，亚里士多德在

讨论无穷这个概念时，就触及到潜在的无穷和真实的无穷，这是人们对无穷的两种观点，潜无穷与实无穷认识的开始。

亚里士多德虽然提到了两种无穷思想，但他本人只承认潜无穷的存在性，而不承认存在着实无穷。他承认自然数是无穷的，是因为任何一个自然数加上一还是自然数，不承认自然数组成的无穷总体，即不承认自然数集合的存在性。

综观数学思想史，可以看出，康托尔以前的数学家们基本上都是潜无穷的观点。无穷过程是潜无穷的，哥西等数学家在分析学中的无限小，无限大也是潜无穷思想的发展。莱布尼兹是实无穷论者，他的无限小是实在无限小，然而他无法解决实无限小的逻辑困难，实无限小被驱除了。直到本世纪60年代，美国数理逻辑学家鲁滨逊发展了莱布尼兹的思想，严格地证明了存在着既非零又非有限数量的无限小量，即实无限小确实存在，创立了非标准分析，使实无限小及实无限大又重新回到分析学领域。但这是后话，实无穷的真正奠基人是康托尔。

无穷总体在数学中就是无穷集合。康托尔认为无穷集合是一个现实的、完成的、存在着的整体，是可以认识、可以把握、可以抓住的东西，

因而是实在的无穷。潜无穷论者否认实无穷，认为无穷不是已经完成的整体，而是就其发展来说是无穷的，因而无穷只是潜在的。

康托尔预计到他的观点会遭到世俗的反对，1883年时就预言："我很了解，我这样做，会使自己处于广泛流传的关于数学无穷的观点对立面，也使自己对立于目前流行的关于数的性质的意见。"但他坚信，他的工作经过一定的时间，将被公认为是"简单的、合适的并且是自然的。"

康托尔关于实无穷的观点，概括起来有如下几个方面。

第一，肯定实无穷是数学理论发展的需要。如前所述，代数学和分析学都是建立在实数的基础上，而实数特别是无理数理论的建立都离不开实无穷，基本序列或戴德金划分都假定实无穷；承认作为变量的潜无穷，也必然要承认实无穷，因为变量如果能取无穷多个值，就要有一个变量能从其中取值的"论域"，这个论域必然是一个实无穷，而且必须事先给定，不许再是变化的，这才能有固定的基础。

康托尔认为，数学证明中应用实无穷由来已久，是不可避免的。哥西、维尔斯特拉斯、波尔

查诺等名家在证明中都用到无穷集合。例如，把一个无穷点集合分成有限个子集合，其中必有一个还是无穷点集合。

第二，无穷有其固有的本质，不能把有穷所具有的一切性质都强加于无穷。康托尔在《论对实无穷的各种观点》一文中说，有些人的反对意见实在是一种逻辑上的预期理由。一切关于“不可能有实无穷”的所谓证明都是错误的，其原因在于“这些证明一开始就期望那些数具有有穷数的一切性质，或者甚至于把有穷数的性质强加于无穷。可是恰好相反，这些无穷数，如果它们能够以任何形式被理解的话，倒是它们和有穷的对立，它们必须要有完全新的数量特征，这些性质完全依赖于事物的本性……而不是来自我们的主观任意性或偏见。”在本书的第二章中将介绍实无穷的特殊性质。

第三，有穷的认识能力可以认识无穷。反对实无穷的人还有一个理由是，人们的认识能力是有限的，形成数量只限于有穷。康托认为，人的认识能力虽然有限，却可以认识无穷。无穷和有穷一样，是可以“通过确定的、明确的和彼此不同的数量”来表达和理解。在一定的意义下，也可以说人们有“无限的才能”，一步一步地去形

成更大的数类或集合。

6. 无穷集合

康托尔系统地研究无穷集合，把无穷集合作为研究对象，是从证明“函数展开为三角级数的唯一性”开始的。这方面的论文发表于《数学杂志》1870～1872年。1870年的论文证明：如果对于一切实数 x，存在着一个三角级数收敛于0，即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0$$

则系数a_i和b_i都等于0。1871年的论文推广了上述结果，即当此三角级数在有穷多个点 x 处不收敛，结论仍然成立。他把这些使三角级数不收敛的 x 称为例外值。1872年又进一步推广到例外值是无穷集合的情形。为了说明这里的例外值的无穷集合的性质，在该文中对无穷集合进行了分类，引入了点集合的极限点以及导集合等重要概念。但是，他关于无穷集合论的第一篇革命性的论文发表于1874年，从1874年开始直到1897年，康托尔在集合论与超穷数方面的论文，分别发表在

《数学杂志》与《数学年鉴》上。他的这一系列论文中的创造性光彩引起了人们的注意，使他成为当之无愧的现代数学基础的奠基人。

无穷集合的概念是集合论的难点。康托尔抓住了无穷集合的本质特性，即无穷集合能与它的真子集合构成一一对应。戴德金把能与本身的真子集合构成一一对应作为无穷集合的定义。

最基本的无穷集合是由所有自然数组成的集合 ω。ω 作为一个整体，记做

$$\omega=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\cdots\}$$

由 ω 可以得到许多无穷集合，如偶数集合

$$\{0,2,4,6,\cdots\cdots\}$$

奇数集合

$$\{1,3,5,7,\cdots\cdots\}$$

素数集合

$$\{2,3,5,7,\cdots\cdots\}$$

这些都是 ω 的真子集合，并且都是无穷集合。

另外，还可以构造以 ω 为真子集合的无穷集合，例如整数集合 Z

$$Z=\{\cdots\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\cdots\}$$

有理数集合 Q

$Q=\left\{\frac{n}{m}\middle| m、n\text{ 为整数且 }m\neq0,\frac{n}{m}\text{ 是既}\right.$

约分数}

实数集合 R

$$R=\{x|x\text{为实数}\}$$

如此等等，读者还可以构造更多的无穷集合。

集合是由它的元素组成的整体，因此，一个集合由它的元素来确定。我们列举的这些集合都是无穷集合，都是实无穷总体的例子。

这些实无穷总体是否能比较大小呢？我们在下一章来回答这个问题。

7. 历史注记

1）墨子名翟，战国时期鲁国人，著名的学者，墨家学派的创始人。墨子及其学生的集体著作《墨子》共有七十一篇，现存的只有五十三篇，该书总结了许多有关逻辑、光学、几何的知识。欧几里得几何《原本》中论述的几何知识，在《墨子》中几乎全都涉及到了。而且一些概念的准确性也不亚于《原本》。可以说是世界上最早的几何学。

2）刘徽是我国魏晋时代的数学家，他是中

国数学史上最杰出的数学家之一，是我国古代数学理论的奠基人。他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》是最宝贵的遗产。遗憾的是关于他的籍贯、履历、生卒年月都不见史册记载。

3）毕达哥拉斯学派的兴旺时期为公元前500年左右。该学派没有留下书面著作，他们把几何、算术、天文学和音乐称为“四艺”。在其中追求宇宙的和谐及规律性。一般提到毕达哥拉斯的贡献时，指的是该学派的工作。从某种意义上讲，现代作为演绎系统的纯粹数学，起源于该学派。

4）亚里士多德的著作涉及到力学、物理学、数学、逻辑等十多种学科领域。他的方法论对于数学的影响是很大的。对逻辑推理过程进行深入研究，得出三段论法，并把它表达成一个公理系统，这是最早的公理系统。由于他的研究使逻辑成了一门独立的学科。

5）欧几里得的代表著作是《几何原本》。这是一本流传最广、版本最多、内容丰富的教科书。而且为所有的后代人所使用，直到现在，中学几何教材的内容基本与《原本》类似。欧几里得的贡献在于他总结了古希腊人的数学知识，构成了一个实质公理系统，形成了一个标准的演绎

体系。这对数学以及哲学、自然科学的影响一直延续到十九世纪。

6）伽利略在许多科学领域里都是一个杰出的人物，他是敏锐的天文观察者，常被称为近代发明之父。他的两部经典著作是《关于两大世界体系的对话》和《关于两门新科学的对话》。他相信自然界是用数学设计的，自然界是简单而有秩序的，它按照完美不变的数学规律活动着。因此，数学知识不但是绝对真理，而且象圣经那样，每句每行都是神圣不可侵犯的。

7）高斯是德国著名数学家。他的博士论文是证明了代数基本定理。他在代数学、复变函数及位势理论方面都有重要贡献。另外在没有发表的论文中研究了椭圆函数和非欧几何。

8）波尔查诺是分析严密化的奠基人之一。他最早给出连续函数的正确定义，并且是朝着建立集合理论采取积极步骤的第一人。

9）维尔斯特拉斯，德国数学家。实数理论的建立人之一。他以极端仔细、严谨的推理著称。主要贡献是消除了微积分基本概念中存在的一些混乱，以及建立在幂级数之上的复变函数论基础。

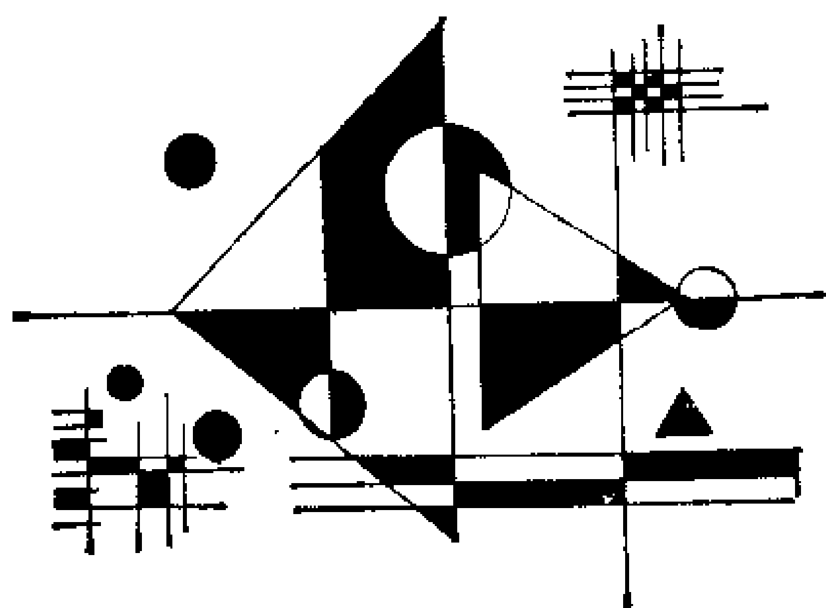
10）柯朗尼克是当时德国权威数学家，康托

尔的老师，但他处处跟康托尔为难。他的主要贡献在椭圆函数、理想数论及二次齐式的算术等方面。

11）戴德金是德国数学家，建立了实数的严谨理论。另外在代数数论及抽象代数方面作出了贡献。

12）鲁滨逊是美国数理逻辑学家，他利用模型论的思想构造出实数域R的一个扩张$^*R$。$^*R$中除了（标准）实数外，还含有非标准实数，从而于1960年建立了非标准分析。

二 无穷集合的分类



1．一一对应

一一对应是将集合进行分类的标准，利用一一对应的概念区分各类无穷集合，是认识无穷集合的关键，是认识史上的一个飞跃。

为了搞清楚一一对应概念，也为了以后各章的需要，我们先介绍一些必要的知识。

1）笛卡尔积

对于任意两个集合S_1和S_2，我们汇集所有有序对集合 $\langle x,y\rangle$ （其中$x\in S_1$，$y\in S_2$）成为一个整体，记做

$$S_1\times S_2:=\{\langle x,y\rangle \mid x\in S_1 \text{ 且 } y\in S_2\}$$

则$S_1\times S_2$也是一个集合，并称它为S_1与S_2的笛卡尔积或卡氏积。

所谓有序对集合 $\langle x, y\rangle$，其元素之间是有顺序的，就象平面上的点用坐标表示一样，x 称为第一分量，y 称为第二分量。

当 $S_1 = S_2 = S$ 时，记 $S \times S$ 为 S^2。

一般说来，$\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$。而对于无序对集合来说，$\{x,y\} = \{y,x\}$。

2）关系

集合 $S_1 \times S_2$ 的子集合 R 称为 S_1 到 S_2 的关系。S^2 的子集合 R，称为 S 上的关系（二元关系）。因此，当写出

$$R \subseteq S_1 \times S_2$$

时，即表示 R 是 S_1 到 S_2 的关系。

在日常生活中，在数学中，关系的例子是很多的，如数学中的小于"<"是一个关系。对于集合 $S = \{1,2,3,4\}$ 来说，小于关系就是

$$\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$$

对于 S_1 到 S_2 的任一关系 R。记

$$\mathrm{dom}(R) := \{x \mid 存在\ y\ 使得\ \langle x, y\rangle \in R\}$$

称 $\mathrm{dom}(R)$ 为 R 的定义域，记

$$\mathrm{ran}(R) := \{y \mid 存在\ x\ 使得\ \langle x,y\rangle \in R\}$$

并称 $\mathrm{ran}(R)$ 为 R 的值域。

关系R的定义域和值域都是集合，并且有$\mathrm{dom}(R)\subseteq S_1$，$\mathrm{ran}(R)\subseteq S_2$。

当$x\in S_1$和$y\in S_2$之间有关系R时，记做$\langle x, y\rangle\in R$，或xRy，或$R(x,y)$。

例如 设$S=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。用符号"|"表示整除关系，则

$$| = \{\langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,8\rangle\}$$

并且$\mathrm{dom}(|)=\{2,3,4\}$，$\mathrm{ran}(|)=\{4,6,8,9\}$。

3）函数

我们说R是S_1到S_2的一个关系时应该注意：第一，并不是对于每个$x\in S_1$都有$y\in S_2$，使得xRy，只有当$x\in\mathrm{dom}(R)$时，才有xRy；第二，当$x\in\mathrm{dom}(R)$时，也不必保证只有一个$y\in S_2$，使得xRy。现在引入一种特殊的关系，即函数概念。

如果对于S_1中每一个x，都有S_2中唯一的一个y，使得xRy，我们就称R是S_1到S_2的函数，或映射。当R为函数时，一般用小写字母f表示之，并用$y=f(x)$来代替xfy，一般采用记号

$$f: S_1 \longrightarrow S_2$$

或 $$x \longmapsto y=f(x)$$

表示函数，且$\mathrm{dom}(f)=S_1$，$\mathrm{ran}(f)\subseteq S_2$。

称 y 是 x 在 f 下的象，x 称为 y 在 f 下的原象。

在函数的定义中只要求：对于 S_1中任一 x，在S_2中都有唯一的一个 y 与之对应，即S_1 中任一元素在 f 下的象是唯一的。而 S_2 中的任一元素 y，只有 $y \in \mathrm{ran}(f)$ 时才有原象，而且原象也不一定是一个，它可以是多个甚至无穷多个。

如果对于任一$y \in \mathrm{ran}(f)$，其原象只有一个，即当x_1，$x_2 \in S_1$且$x_1 \neq x_2$时，有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为一单射（或一对一映射）函数。

如果对于任一 $y \in S_2$，在 f 下都有原象。即 $\mathrm{ran}(f) = S_2$，则称 f 为满射函数。

既是单射又是满射的函数，称为一一对应（或双射）函数。

函数的概念是数学中基本概念之一，这里给出的概念是严谨的，也是合乎现代标准的。

2. 集合的势

对于两个有穷集合S_1与S_2来说，如果在 S_1 与 S_2 之间能建立一一对应，那末这两个集合所含元素的数目是相等的，如果S_1与S_2的某一真子集合能建立一一对应，则S_1中元素的数目一定小于 S_2

中元素的数目。将这种思想应用于无穷集合，就得到集合的等势概念。

设S_1和S_2是两个任意的集合，如果在S_1与S_2之间存在着一一对应，我们就说集合S_1与S_2是等势的（或者对等的、等价的），也可以说它们具有相同的势，记做$\overline{\overline{S}}_1=\overline{\overline{S}}_2$。

如果S_1与S_2的一个真子集合能构成一一对应，但S_2与S_1的任一真子集合都不能构成一一对应，那末我们就说S_1的势小于S_2的势，记做$\overline{\overline{S}}_1<\overline{\overline{S}}_2$。

当存在着S_1到S_2的单射时，我们只能说S_1的势不大于S_2的势，记做$\overline{\overline{S}}_1\leqslant\overline{\overline{S}}_2$。

对于有穷集合来说，势就是它所包含的元素的数目，并且当S_1是S_2的真子集合时，根据“整体大于部分”这一原则，必然有$\overline{\overline{S}}_1<\overline{\overline{S}}_2$。但是对于无穷集合来说，这一原则失灵了。要想比较两个无穷集合所含元素的“多少”，就必须利用势的概念。

集合之间的等势关系，它满足通常数学上的等价关系的条件，即这一关系具有下列三个性质：

1）反身性：$\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{S}}$；

2）对称性　如果$\overline{\overline{S}}_1=\overline{\overline{S}}_2$则$\overline{\overline{S}}_2=\overline{\overline{S}}_1$；

3）传递性：如果$\overline{\overline{S}}_1=\overline{\overline{S}}_2$且$\overline{\overline{S}}_2=\overline{\overline{S}}_3$，则$\overline{\overline{S}}_1=\overline{\overline{S}}_3$。

由于等势关系是等价关系，利用等势关系可以将集合分成等价类。凡是势相等的集合归于一类，不等势的集合归于不同的类。

我们在第一章已经看到，伽利略已经发现无穷集合与它的真子集合之间存在着一一对应，但是他不得要领，困惑不解。哥西因为正整数和其平方数之间有一一对应，所以否认实无穷（即无穷集合）的存在性。波尔查诺坚决维护实无穷的存在性，认为“和真部分一一对应”不是矛盾，并且他实际上已经建立了集合的等价概念，但是他没有把一一对应作为无穷集合的分类标准。用一一对应将集合进行分类，从而得到重大成果的第一个人是康托尔。思想认识上这个飞跃，是基于康托尔的唯物主义精神。因为如果把“和真部分一一对应”看做矛盾，就必然反对无穷集合的存在性。但是数学实践离不开无穷集合，无穷集合又确实有这种特性，因此，人们必须承认无穷和有穷具有本质的差别，我们不能把有穷的一切

性质强加于无穷。对有穷集合来说，“和真部分一一对应”是不可能的，是矛盾，对无穷集合来说，不仅不是矛盾，而且用一一对应作为分类的标准，这正是康托尔的创新精神。

3. 可数集合

各类数组成的集合是最重要的一些集合。人们最早认识的是自然数，然后根据需要，逐步扩充到整数、有理数、实数及复数。这样一来，就有了自然数集合，整数集合，有理数集合，实数集合及复数集合。这些都是无穷集合。

最简单的是自然数集合ω：

$$\omega=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\cdots\}$$

通过对应$n\longmapsto 2n$，在ω与偶数集合（是ω的真子集合）之间建立一一对应。读者不难发现，奇数集合、素数集合、自然数的平方数集合都能与ω构成一一对应，即它们都与ω等势。而且可以证明：

ω的任一无穷子集合都与ω等势。

另外，从表面上看比ω的元素多得多的整数集合Z，也与ω是等势的。这只要通过如下的对

应关系，

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \cdots & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots & \cdots \end{array}$$

就能一目了然。这些例子充分说明：和自然数集合等势的无穷集合是相当多的。

与自然数集合等势的集合叫做可数集合（或可列集合）。可数集合的势记做$\aleph_0$（读做阿列夫零）。

素数集合、奇数集合、自然数集合、整数集合等都是可数集合，其势都为$\aleph_0$。当我们把势理解为无穷集合元素数目的“多少”时，得到与人们直观相违背的结论。因为上述四个集合，从直观上看来，一个比一个大，并且一个比一个要多出无穷多个元素，然而它们的势竟然相同，都是$\aleph_0$。这正是无穷集合的本质特性。深入讨论下去，我们会得到更为令人惊讶的结论。

1）有理数集合Q的势也是$\aleph_0$。

为了证明这一结论，只须构造一个一一对应$f: \omega \longrightarrow Q$。如图2·1所示：在一个半平面上，最上面一排称为第1行，标以数1，从上而下，分别称为第2行，第3行，……，顺次标以数2，3，……。每行正中间为0列，标以数0。

从中间开始向右，顺次为1列，2列，……，从0列向左，顺次为－1列，－2列，……等等。在

	……	−3	−2	−1	0	1	2	3 ……
1	……	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1} \leftarrow$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1} \rightarrow$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1} \rightarrow$	$\frac{3}{1}$ ……
		↑	↓	↑		↓	↑	↓
2	……	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2} \leftarrow$	$\frac{0}{2} \leftarrow$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$ ……
		↑	↓				↑	↓
3	……	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-2}{3} \rightarrow$	$\frac{-1}{3} \rightarrow$	$\frac{0}{3} \rightarrow$	$\frac{1}{3} \rightarrow$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$ ……
		↑						↓
4	……	$\frac{-3}{4} \leftarrow$	$\frac{-2}{4} \leftarrow$	$\frac{-1}{4} \leftarrow$	$\frac{0}{4} \leftarrow$	$\frac{1}{4} \leftarrow$	$\frac{2}{4} \leftarrow$	$\frac{3}{4}$ ……
⋮	⋮							⋮

图 2.1

m行n列相交处放置上有理数$\frac{n}{m}$，这样一来，在下半平面的格子点上，就把所有的有理数都枚举出来了。当然，有些格子点上是同一有理数，如$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$和$\frac{4}{8}$等等都是有理数$\frac{1}{2}$。我们从$\frac{0}{1}$开始，沿着图2·1中箭头所指的方向前进。只取第一次

遇到的$\frac{1}{2}$作为函数 f 的值，而随后再出现的$\frac{2}{4}$，$\frac{4}{8}$等等不再作为函数值，构造的一一对应 f 如下：

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f(2)=\frac{1}{2},$$

$$f(3)=-\frac{1}{2},\ f(4)=-1,\ f(5)=-2,$$

$$f(6)=-\frac{2}{3},\ f(7)=-\frac{1}{3},\ f(8)=\frac{1}{3},$$

……

这就证明了有理数集合是可数的，即$\overline{\overline{Q}}=\aleph_0$。

2）所有代数数组成的集合A是可数的。

所谓代数数是指某一个代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (2\cdot1)$$

的根，其中a_0，a_1，…，a_n都是整数，且$a_0\neq0$。不是代数数的数称为超越数。

任何一个有理数$\frac{n}{m}$都是代数数。因为它是代数方程 $mx-n=0$的根。所以$Q\subseteq A$。但是，代数数不一定是有理数。例如无理数$\sqrt{2}$是代数方程$x^2-2=0$的根，复数$\pm i$是代数方程$x^2+1=0$的

限，所以它们都是代数数。总之，代数数集合包括了所有有理数，一部分无理数和复数。为了简单起见，我们仅考虑实代数数集合A。

现在证明A是可数集合。对于任一代数方程（2·1），确定一个正数h：

$$h=(n-1)+|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n| \quad (2\cdot2)$$

其中$|a_i|$表示a_i的绝对值，称h为方程（2·1）的高。

给定一个代数方程（2·1），高总是一个确定的正整数。反之，给定一个正整数h，高为h的代数方程不是唯一的，例如，$x-3=0$，$x^3+1=0$，$x^3-1=0$，$x^2+x+1=0$，$x^2-x+1=0$这些代数方程的高都是4。但是可以证明：对于一个固定的正整数h，以h为高的代数方程（2·1）只有有穷个。因此，我们可以把所有的代数方程枚举出来。先把$h=1$的方程枚举出来，再把$h=2$的方程枚举出来，如此继续下去，就能把所有的代数方程枚举出来。当然，高h相同的方程可以按任意的顺序排列。

由代数学知道，形如（2·1）的方程的根的个数不超过它的次数n.于是，高为h的所有代数方程的根的个数总是有穷多个。现在，我们就可

以枚举所有的代数数了。

首先把高为1的代数方程（仅有一个：$x=0$）的根（即数0）枚举出来，再把$h=2$的方程的根按大小顺序枚举出来，如此继续下去，就把所有的代数数枚举出来了。

应当注意，在这一枚举过程中，同一个代数数可能出现若干次。例如2是下列诸方程

$$x-2=0,\ x^2-4=0,\ x^4-16=0$$

的根，这三个方程的高h分别等于3，6和20。在这种情况下，2在$h=3$时已枚举过了，那末在$h=6$，20时就不再枚举了。这样一来，我们就得到由不同的代数数所组成的序列，从而集合A与自然数集合构成一一对应，即A是可数的。

3）在证明有理数集合Q及代数数集合是可数的过程中，都运用了一定的技巧，想法将其元素无重复地枚举成一个无穷序列。这种枚举破坏了数之间的自然大小顺序。例如，$-\frac{1}{8}$与$\sqrt{7}$分别是方程 $8x+1=0$ 和$x^2-7=0$的根，此二方程的高$h=9$，因此在枚举的序列中就互相接近，$-\frac{1001}{8000}$与$-\frac{1}{8}$虽然相差很小，但它作为方程$8000x+1001=0$（其高$h=9001$）的根，只能在序列中

"很远"的地方才出现。

采用枚举出所有元素的办法，对于一般的可数集合（不一定是数的集合），可以得到许多重要的性质：

性质 1 可数集合的任何一个无穷子集合是可数集合。

性质 2 一个可数集合与一个有穷集合的并集是可数的；一个可数集合删去有穷个元素后仍得到可数集合。

性质 3 任何一个无穷集合都包含有可数子集合。这一性质告诉我们，可数集合的势$\aleph_0$是最小的无穷势。

性质 4 有穷个可数集合的并集合是可数的。

性质 5 可数个可数集合的并集合，仍然是可数的。即$\aleph_0$个可数集合的并集的势仍然等于$\aleph_0$。

可以采用下述方式来证明性质 5。为了简单起见，不妨假设这些集合是两两不交的（即两两的交集合是空集ϕ），且设

$$S_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}, \cdots\}$$

$$S_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2n}, \cdots\}$$

$$S_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots, a_{3n}, \cdots\}$$

… … …

其并集合记为 $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup\cdots$。对$S$的元素按图2.2中的箭头方向重新排列：

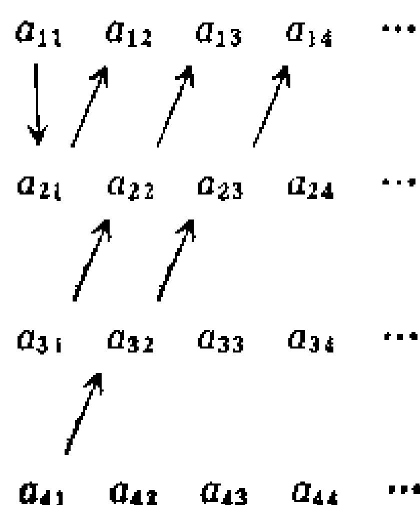


图 2.2

在上述排列中，从左上角开始，每一条斜线上的各个元素的两个足码之和都相同，且依次为 2，3，4，5，…，斜线上元素的个数依次为 1，2，3，4，…。这样一来，依图 2.2，将S的元素排列为：

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ \cdots$$

由此就建立起S与自然数集之间一一对应，所以S是可数的。

4. 实数集合是不可数的

看了可数集的奇特性质以后，自然会产生一个疑问：是不是所有的无穷集合都是可数的呢？实数集合是可数的吗？康托尔1873年给戴德金的一封信中就提出过这样一个问题。几个星期以后他自己就回答了这个问题，认为实数集合不能和自然数集合构成一一对应。他给出了两个证明，我们只介绍第二个证明。

1）区间（0，1〕中的点是不可数的，即实数集合$\{x|0<x\leqslant1\}$是不可数的。

首先指出，在十进制下，0与1之间的每个实数都可以写成$0.p_1p_2p_3\cdots$这样形式的无穷小数。并且约定将有理数写成无穷小数，如$\frac{1}{2}=0.4999\cdots$。

假设实数集合（0，1〕是可数的，将其元素全部枚举出来，得到序列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots \qquad (2\cdot3)$$

于是我们在自然数集合与实数集合（0，1〕之间构成了一一对应

$$0\leftrightarrow a_0=0.p_{01}p_{02}p_{03}p_{04}\cdots\cdots$$

$$1 \leftrightarrow a_1 = 0.p_{11}p_{12}p_{13}p_{14}\cdots\cdots$$
$$2 \leftrightarrow a_2 = 0.p_{21}p_{22}p_{23}p_{24}\cdots\cdots$$
$$3 \leftrightarrow a_3 = 0.p_{31}p_{32}p_{33}p_{34}\cdots\cdots$$
$$4 \leftrightarrow a_4 = 0.p_{41}p_{42}p_{43}p_{44}\cdots\cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$k \leftrightarrow a_k = 0.p_{k1}p_{k2}p_{k3}p_{k4}\cdots\cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

现在构造一个数 $b = 0.b_0b_1b_2\cdots\cdots b_k\cdots\cdots$，其中

$$b_k = \begin{cases} 5, & \text{当} p_{kk} \neq 5 \text{时，} \\ 4, & \text{当} p_{kk} = 5 \text{时。} \end{cases}$$

则 b 是 0 与 1 之间的一个实数，其数字都是 4 或 5。b 是一个无穷小数，并且它的 k 位数字 $b_k \neq p_{kk}$，所以 b 与（2·3）中任何一个数都不相同。这说明序列（2·3）并没有把（0,1〕中的数枚举完，即假设集合（0，1〕是可数的是错误的，所以集合（0，1〕是不可数的。

注记 1　上述证明过程是，首先假定集合（0，1〕是可数的，因而就必然存在一一对应 $f:\omega \to (0,1]$，使 $f(k) = a_k$ 且 $\operatorname{ran}(f) = (0, 1]$。我们把 $\operatorname{ran}(f)$ 列举为式（2·3），即序列（2·3）中列举出了集合（0,1〕中的全部元素。但是，我们又构造出了一个数 b，$b \in (0,1]$ 但 b 不在序列（2·3）中。从而得到一个矛盾，说

明集合 (0，1] 为可数的假设是错误的，完成了我们欲证的结果。一些初次接触集合论的读者，往往对上述过程搞不清楚，有人提出，把找到的数 b 放到 (2·3) 中，不就成为可数的了吗？我们说这样做是不允许的，因为前提已经规定 (0，1] 中的元素都枚举在 (2·3) 式中，证明过程不在于找到一个数，而在于找到了与题设的矛盾。题设说 (2·3) 把 (0，1] 中的数枚举完了，而找到的 b 不在 (2·3) 中从而说明题设不成立，这是使用反证法与归谬法证明数学定理的基本步骤。初学者对此要有正确的理解。

注记 2　上述证明中，我们在构造数 b 时，数字 4 和 5 并不起什么特殊的作用。我们只利用了 b 的这样一种性质：即 b 的第 k 位数字 b_k 与 (2·3) 式中第 k 个数的 k 位数字 p_{kk} 不同。因此，与 p_{kk} 不同的其余九个数字都可以作为 b_k 。在证明中起决定作用的是"对角线"上的数字 p_{kk}。这种证明方法称为康托尔对角线法。在集合论中经常使用对角线法证明一些定理，读者对此法要给以足够的重视。

注记 3　这里的证明与前面的不同。它是要证明两个集合不是对等的，是一个不可能性定理。而前面都是证明两个集合对等的定理，是能行性定理。对于能行性定理，不论采用什么手段，只要能在两个集合之间建立起一一对应就行了。而对于不可能性定理，想直接证明是相当困难的。康托尔运用反证法，抓住对角线上的元素，构造出一个新的数导致矛盾，既简单又明了。

注记4　实数集（0，1〕是不可数的，而代数数是可数的，从而说明超越数是存在的，这是康托尔对超越数存在性的一个非构造性的证明。

集合（0，1〕的势记作$\aleph$（读为阿列夫）。并称$\aleph$为连续统势。

对于任意两个实数 $a<b$。通过线性函数 $f(x)=a+(b-a)x$可以在集合（0，1〕和$(a,b]$之间建立一一对应。从而得出 $\overline{\overline{(a,b]}}=\aleph$。

一个无穷集合删去或增加有穷个元素，其势不会发生变化，所以区间（a,b）和〔a,b〕的势也是$\aleph$。特别是，$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$的势是$\aleph$。

在集合$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$与全体实数集合（$-\infty$，$+\infty$）之间，通过函数 $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ 建立起一一对应，所以全体实数组成的集合的势仍是$\aleph$。

由于人们把实数系称为（线性）连续统，这就是称$\aleph$为连续统势的原因，在很多文献中也用连续统的第一个英文字母 c 表示连续统势。

2）现在我们已经有两个不同的无穷势$\aleph_0$和$\aleph$。自然会问有没有更大的无穷势。康托尔首先想到，平面上所有的点构成的集合可能与线性连续统不等势。1874年他就开始考虑这个问题，经

过了三年的探索与研究，他终于得到了初步的结论，但是和他原来的预料情况相反，他证明出 n 维空间的点集与直线上的点集是对等的，即它们有相同的势。1877年6月他写信给戴德金，请审查他的证明。信中还说，“我看到了它，但是简直不能相信它”。对自己所得结论持怀疑态度。

以二维情况为例，我们说明如何在平面点集与直线点集之间构造一一对应。为此，只需要说明单位正方形内的点集

$$E=\{\langle x,y\rangle \mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$$

和区间（0,1）内的点集如何构成一一对应就行了。

设 $\langle x,y\rangle$ 是单位正方形内的一个点，Z 是（0,1）中的点。设 x，y 都表示成无穷小数（当为有限小数时，写成9的无限循环）。我们把 x 和 y 的小数分成一组一组的，每一组都终止在第一个非零的数字上。例如

$$x=0.3\quad 0.2\quad 4\quad 005\quad 6\cdots$$

$$y=0.01\quad 7\quad 06\quad 8\quad 04\cdots$$

令

$$z=0.3\quad 01\quad 02\quad 7\quad 4\quad 06\quad 005\quad 8\quad 6\quad 04\cdots$$

其中各组数字是：先排 x 的第一组，再排 y 的第

一组，然后排上x的第二组，y的第二组，依此进行下去。如果$x_1 \neq x_2$，或者$y_1 \neq y_2$，即两个x或两个y有不同的小数位数字，则所对应的两个z不同。即$\langle x_1, y_1 \rangle \neq \langle x_2, y_2 \rangle$时，$z_1 \neq z_2$。这说明映射$\langle x, y \rangle \longmapsto z$是一对一的。反之，对于任意的$z \in (0,1)$，把$z$的小数也象上面那样分组，并把上述过程倒过去使用，作出相应的x和y。则$\langle x, y \rangle$是单位正方形E中的点，所以上述映射是满射。因而这个映射是一一对应。所以$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{(0,1)}} = \aleph$。

注记 5　证明中描述的一一对应不是连续的，形象地讲，当点$\langle x_1, y_1 \rangle$与点$\langle x_2, y_2 \rangle$很靠近时，其对应的点z_1和z_2不一定很靠近，反之也是如此。1879年，吕洛斯证明了：一维连续统不能和二维连续统有连续的一一对应。这就是说，这种一一对应不能是一个连续函数。

5．更大的无穷集合

在上面我们看到，n维空间的点集与直线上的点集相比较，它不是更大的无穷。是否能从已知的无穷集合出发，根据正确的数学运算，构成

更大的无穷集合呢？康托尔1891年的论文《集合论的一个根本问题》作出了肯定的回答。他用对角线方法证明了一个定理，现在人们称之谓**康托尔定理**：

对于任一集合S，都有$\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(S)}}$，其中$P(S)$表示$S$的幂集合，即$S$的所有子集合组成的集合。

证明　首先证明　$\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{P(S)}}$。因为对于任一$x\in S$，令　$f(x)=\{x\}$。当$x_1\neq x_2$时，$\{x_1\}\neq\{x_2\}$，即　$f(x_1)\neq f(x_2)$。从而，　$f:S\longrightarrow P(S)$是一对一的函数．因此有

$$\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{P(S)}} \tag{2·4}$$

其次，我们证明

$$\overline{\overline{S}}\neq\overline{\overline{P(S)}} \tag{2·5}$$

假若等号成立。则存在着一一对应$\varphi:S\rightarrow P(S)$由于对于任一$x\in S$,$\varphi(x)\in P(S)$,即$\varphi(x)$是$S$的子集合，$\varphi(x)\subseteq S$。现在要问：这个$x$是否属于$\varphi(x)$？当然，一般说来，可能是$x\in\varphi(x)$，也可能是　$x\notin\varphi(x)$　。构造一个集合S_0，它是由$x\notin\varphi(x)$的那些元素x组成的，即

$$S_0=\{x|x\in S且x\notin\varphi(x)\} \tag{2·6}$$

显然，$S_0 \subseteq S$，即 $S_0 \in P(S)$。于是，根据 φ 是一一对应，必然存在一个 $x_0 \in S$，使得 $\varphi(x_0) = S_0$。根据逻辑排中律，或者 $x_0 \in S_0$，或者 $x_0 \notin S_0$，二者必有一个且仅有一个成立。

假若 $x_0 \in S_0$ 成立。根据（2·6）式中对 S_0 中元素的要求，应有 $x_0 \notin \varphi(x_0)$，而 $S_0 = \varphi(x_0)$。从而得到 $x_0 \notin S_0$。

假若 $x_0 \notin S_0$，由 $S_0 = \varphi(x_0)$ 得 $x_0 \notin \varphi(x_0)$。这样一来，根据 S_0 的定义（2·6），应有 $x_0 \in S_0$。

于是，不论 x_0 是否属于 S_0，都导致矛盾。此矛盾说明在 S 与 $P(S)$ 之间存在一一对应是错误的，所以不等式（2·5）成立。

由（2·5）和（2·4）式立即得到欲证明的结论：

$$\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}} \qquad (2·7)$$

康托尔定理在集合论的发展史上具有极其重要的作用。首先，它揭示了存在着不可数的无穷集合。因为由康托尔定理，得到 $\overline{\overline{\omega}} < \overline{\overline{P(\omega)}}$。即 $\aleph_0 < \overline{\overline{P(\omega)}}$，$P(\omega)$ 是不可数的无穷集合。其次，更为重要的是他给出了形成更大的无穷集合的方法——幂集合的方法。给定一个无穷集合 S，它的幂集合 $P(S)$ 是更大的无穷集合；给定

了一个无穷势，我们可以得到更大的无穷势。由此可以知道，没有最大的集合，也没有最大的势。

因为对于有穷集合S，如果它的势（即元素的个数）为n，容易证明其幂集合$P(S)$的势为2^n（显然，$n<2^n$）。仿此，当S为无穷集合时，我们把$P(S)$的势也记做$2^{\bar{S}}$。

从自然数集合ω出发，利用幂集合的办法，形成了一个比一个大的无穷集合

$$\omega, P(\omega), P(P(\omega)), \cdots\cdots$$

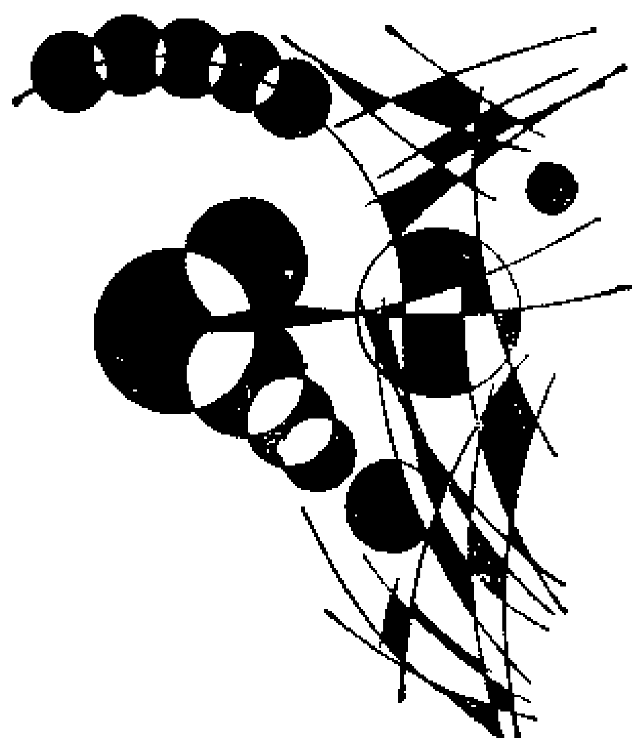
相应地得到了一个比一个更大的无穷势

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \cdots\cdots.$$

6. 历史注记

康托尔，德国著名数学家，集合论的创始人，现代数学的奠基者。1845年3月3日生于俄国圣彼得堡（现在苏联列宁格勒）一个商人家庭。1863年进入柏林大学，1867年写出博士论文。1869年任教于哈勒大学，不久提升为副教授，并在1879年升为教授，直至1918年1月6日他在哈勒大学附近的精神病医院去世。

三 序数与基数



在前一章中，我们已经看到不仅存在着无穷集合，而且还存在着一个比一个的势更大的无穷集合。有穷集合的势就是其所含元素的个数，我们可以用自然数来表示有穷集合的势。为了表示无穷集合的势，就必须引进一些新的数，否则，集合论就无法取得任何进展。正如康托尔在《关于无穷线性点集合（5）》（1883年）一文指出的：对于集合论的研究已经达到这样的地步，它的继续发展依赖于把自然数扩充到现在的范围之外，没有这样一种扩充，简直不能自如地朝着集合论前进的方向迈进那怕是一小步。虽然这种扩张显得是大胆的，但到了适当的时机，这种扩张将被认为是十分简单、适宜而又极其自然的一步。

为了表示无穷集合的势，康托尔引进了一些

新的数，这就是现在人们称之为无穷基数的一类数。

另一方面值得注意的是，集合的势只涉及到集合中的元素有“多少”的问题，根本不考虑集合的元素之间的“前后”顺序。但是，许多集合的元素之间本来就有一种自然的顺序。例如，二十六个英文字母组成的集合的顺序是

$$a, b, c, \cdots, x, y, z$$

自然数集合按从小到大的顺序是

$$0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\cdots$$

有理数集合，实数集合也有其自然顺序，只是由于它们的稠密性，我们无法具体写出来罢了。为了刻画元素之间具有顺序关系的无穷集合，康托尔又引进了一些新数，即所谓的无穷序数。

序数与基数是集合论中两个极其重要的概念。序数是集合论的精髓，是集合论的脊梁骨。基数又是一些特殊的序数。因此，在本章中，我们先引入序数的定义，给出一大批序数后再定义基数，有了基数概念后，又引出更大的序数，如此等等，就为我们度量各类无穷集合准备了足够丰富的数。

1. 序　　数

康托尔是为了度量良序集合而引入序数概念的。我们由康托尔定义开始，然后给出现代通用的序数定义。

1）良序集合

所谓良序集合S，是指在集合S上建立了一种序关系“$\prec$”，x在y前面时记做$x\prec y$。这种序关系要满足下列条件：

（i）传递性，意思就是：若$x\prec y$且$y\prec z$，则$x\prec z$；

（ii）三岐性，即对于任意两个元素$x\in S$和$y\in S$，必有$x\prec y$或$x=y$或$y\prec x$中的一个成立，且仅有一个成立；

（iii）S的任意一个非空集合都有（关于$\succ$关系的）最小元素。

例如，自然数集合在通常大小顺序下，就是良序集合，而有理数集合、实数集合在通常大小顺序下，只满足（i）和（ii），条件（iii）不满足，我们说它们是全序集，但不是良序集。

假若S_1和S_2是两个良序集合，如果它们之间能构成一一对应且保留顺序关系。即$f: S_1\longrightarrow$

S_2 是一一对应且

当$x_1 \prec_1 x_2$时必有 $f(x_1) \prec_2 f(x_2)$

则称S_1与S_2是序同构的。其中 $\prec_1$ 和 $\prec_2$ 分别是 S_1 和 S_2 上的良序关系。

为了引进序数概念，康托尔认为每一个良序集合都有一个"序型"。例如，自然数集合可以构成很多不同的良序集合：

0，1，2，…，n，……；

1，2，3，…，n，……，0；

2，3，4，…，n，……，0，1；

1，3，5，……，0，2，4，……

1，4，7，……，2，5，8，……，0，3，6……

…………

这些良序集合彼此都不是同构的，每一个都有其序型。康托尔把良序集合的序型称为序数。但是，序型到底是什么？是没有说清楚的。甚至是含混的。因此，就是我们把问题说的更明白一些，说同构的良序集合具有相同的序数，应用起来也有不便之处，所以，现代集合论中一般都采用冯·诺依曼的定义。从他的定义中，可以看出无穷序数是自然数的一种合理的扩充，为了说明这一点，我们先考察自然数的性质。

2）自然数

自然数是大家早已熟悉的数，但是，为了便于理解，我们现在要重新定义它们，用集合来表示自然数，即把每个自然数都看成集合，这对于我们理解序数是非常有益的。

设S是一个集合，我们把集合$S\cup\{S\}$称为S的后继。现在就可以归纳地定义自然数如下：

（1）$0:=\phi$ 是自然数。

（2）如果n是自然数，则n的后继$n\cup\{n\}$也是自然数。

（3）只有由(1)和(2)定义的数是自然数。

依照上述定义，我们有$1=\phi\cup\{\phi\}=\{0\}$，$2=1\cup\{1\}=\{0,1\}$，$3=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}$等等。这种定义方式合情合理。用空集ϕ表示0，空集一无所有，数零也表示一无所有；自然数1表示有一件东西，而我们规定它是一个单元集合，其元素是0；一般地，自然数n是由n个自然数0，1，2，…，$n-1$所组成的集合。

记$\omega=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，即$\omega$是以所有自然数为元素所组成的集合，$\omega$是一个无穷集合。

把自然数看做集合，我们可以给无穷集合重新下定义：假若集合S能与某一自然数n构成一

一对应，则称S是有穷集合，否则，就是无穷集合。

把自然数看做集合，具有下列性质：

（1）传递性，即对于任一自然数n，如果$n_1 \in n_2$且$n_2 \in n$，则$n_1 \subset n$。因为由$n_1 \in n_2$和$n_2 \in n$，由定义我们知道：

$$n_2 = \{0, 1, 2, \cdots, n_1, \cdots, n_2 - 1\}$$

$$n = \{0, 1, 2, \cdots, n_1, \cdots, n_2 - 1, n_2, \cdots, n - 1\}$$

显然有$n_1 \in n$。

（2）三岐性，即对于任一自然数n，如果$n_1 \in n$和$n_2 \in n$，则下列三式恰好有一个成立：

$$n_1 \in n_2, \quad n_1 = n_2, \quad n_2 \in n_1.$$

这是因为在自然数的定义过程中，每一步恰好定义一个自然数。如果n_1比n_2先定义出来，就有$n_1 \in n_2$；如果n_1与n_2是同时定义出来的，就有$n_1 = n_2$；如果n_2比n_1先定义出来，就有$n_2 \in n_1$。

由此，我们可重新定义自然数的“小于”关系：$n_1 < n_2$当且仅当$n_1 \in n_2$时。

（3）对于每一个自然数n，只要$n \neq 0$，它一定是某一个后继。意思是说：对于每一个非零的自然数n，一定有一个（且仅有一个）自然数

m，使得$n=m\cup\{m\}$，这时记$n=m+1$，并且，0不是后继。

（4）对于任一自然数n不存在自然数的无穷序列：

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots \qquad (n_i\in n)$$

使得对一切i都有$n_{i+1}\in n_i$。这一性质称为属于关系$\in$的良基性。

这是因为对于每个自然数n，属于它的自然数总是只有有穷个。

能不能把自然数作些推广，使推广后的对象仍然具有上述性质呢？试看集合ω。ω的元素都是自然数并且它包含了所有的自然数。因此，当$n_1\in n_2$且$n_2\in\omega$时必有$n_1\in\omega$，即ω具有传递性；ω的元素都是自然数，显然ω具有三岐性；ω不是后继，就是说，没有任何一个n，使得$\omega=n\cup\{n\}$（这是ω和自然数0的共性）。最后，ω也满足性质（4），即不存在自然数的无穷序列n_1，n_2，n_3，…，使得$n_{i+1}\in n_i$。由此可见，集合ω具有自然数的四个性质。于是，ω可以看做是一个数，它不是自然数，但具有自然数的性质。是自然数的合理的扩展。有了ω以后，我们又可以采取求后继的办法，构造出更多的新数

$$\omega+1=\omega\cup\{\omega\}=\{0,1,2,\cdots\cdots,\omega\}.$$

$$\omega+2=(\omega+1)\cup\{\omega+1\}=\{0, 1, 2, \cdots\cdots, \omega, \omega+1\}.$$

如此等等。这些新数ω，$\omega+1$，$\omega+2$，……是无穷数或超限数。

3）冯·诺依曼的定义

为了书写简短起见，我们要使用数学中常用的几个逻辑符号：

逻辑连接词有五个：$\neg$（否定词，读做非），$\wedge$（合取词，读做且），$\vee$（析取词，读做或），$\rightarrow$（蕴涵词，读做如果…则…），$\leftrightarrow$（双蕴涵词，读做当且仅当）。

量词有两个：$\forall$（全称量词，$\forall x$读做对于任一x），$\exists$（存在量词，$\exists x$读做存在x）。

序数的定义。一个集合S，如果满足下列三个条件：

（i）$\forall x \forall y(x\in y\wedge y\in S\longrightarrow x\in S)$；

（ii）$\forall x \forall y(x\in S\wedge y\in S\longrightarrow x\in y\vee x=y\vee y\in x)$；

（iii）S中不存在无穷序列x_1，x_2，x_3，…使得$x_{i+1}\in x_i$成立。

则称集合S是一个序数。

条件（i）是说S是一个传递集合，条件（ii）表示S关于$\in$关系有三岐性（严格地讲，

(ii) 中只要求 $x\in y$, $x=y$, $y\in x$ 三式中有一个成立即可，而没有要求仅有一个成立。但是，在对集合作了一定的限制之后（ ii ）就与三岐性等价），条件（ iii ）表明 S 是一个良基集合，即 S 中总有一个关于$\in$ 关系的最小元素x_0，也就是说，$x_0\in S$但x_0中再也没有 S 的元素了。

由此定义，立即可以得出

（1） 每一个自然数都是序数。

（2） 自然数集合 ω 是一个序数，并且是一个最小的无穷序数。

ω 的最小性可如下推出。假若有一个无穷序数 S 比 ω 小，则 $\omega-S$ 不空，必有自然数 n 不在 S 中。设 n 为不属于 S 的最小的自然数。由于 S 是无穷集合，必有$m>n$，使 $m\in S$。由 $n\subset m$且$m\in S$。由条件（ i ），$n\in S$，这与 $n\notin S$ 矛盾。这就说明小于 ω 的无穷序数不存在，所以 ω 是最小的无穷序数。

为了能构造出更多的序数，而又不在证明的细节方面纠缠，我们重新给出一种序数定义。可以证明，这样的定义与上述定义是等价的。

4 ）序数的归纳定义：

（1） 0 是序数；

（2）如果α是序数，则$\alpha^{+}:=\alpha\cup\{\alpha\}$是序数；

（3）如果S是序数的集合（即S的元素都是序数），则$\cup S$是序数；

（4）任一序数都是经过（1）—（3）获得的。

其中$\cup S$称为集合S的广义并，它是由S的所有元素的元素组成的集合。

今后总用α, β, γ, 或带有足码的α_i，β_j，γ_k等表示序数，也用$On(x)$表示x是序数。对于任意的序数α，令

$$\alpha+1:=\alpha^{+}=\alpha\cup\{\alpha\}$$

并称$\alpha+1$是α的后继。对于一个序数α，如果存在序数β，使得$\alpha=\beta+1$成立，我们就称α是后继序数。对于一个非零的序数，如果不是后继序数，则称它为极限序数。

利用序数的归纳定义，看看能得到多少个序数。由（1）、（2）两条，我们得到所有自然数都是序数，于是得到序数列：

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots \qquad (3\cdot1)$$

ω是自然数集合，即是一序数集合，且由于

$$\cup\omega=\cup\{0,1,2,\cdots\}=\omega$$

根据（3），ω是序数，它是极限序数，且已知

它是最小的无穷序数。在序数列（3·1）中增添一个 ω，得到序数列：

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega \qquad (3\cdot2)$$

从 ω 开始，反复应用定义中的第（2）条，可以得到序数列

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \cdots,\ \omega+n,\ \cdots \qquad (3\cdot3)$$

将（3·2）和（3·3）中出现的序数组成一个集合，记做 $\omega\cdot2$。由于 $\bigcup\omega\cdot2=\omega\cdot2$，所以 $\omega\cdot2$ 是序数，且是极限序数。从 $\omega\cdot2$ 开始，继续上述构造过程，我们得到按从小到大排出的无穷序数列：

$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\cdots$

$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots,\ \omega+n,\ \cdots\cdots$

$\omega\cdot2\quad \omega\cdot2+1,\ \omega\cdot2+2,\ \cdots,\ \omega\cdot2+n,\ \cdots\cdots$

$\vdots$

$\omega\cdot k\quad \omega\cdot k+1,\ \omega\cdot k+2,\ \cdots,\ \omega\cdot k+n,\ \cdots\cdots$

$\vdots$

$\omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \cdots,\ \omega^2+n,\ \cdots\cdots$

$\vdots$

$\omega^3,\ \omega^3+1,\ \omega^3+2,\ \cdots,\ \omega^3+n,\ \cdots\cdots$

$\vdots$

ω^{ω}, $\omega^{\omega}+1$, $\omega^{\omega}+2$, …, $\omega^{\omega}+n$, ……

⋮

(3·4)

除了第一行为有穷序数即自然数外，其它都是无穷序数，并且每行的第一个是极限序数。用这种方式所得到的序数，已经远远地超过了人们所能想象的范围，把自然数扩展成一个无穷无尽的序数王国。但是，可以证明，这些无穷序数都是可数序数，即作为集合，竟然与自然数集合ω能构成一一对应，似乎是不可思议。可数序数已经如此复杂，然而我们将要看到，在一定意义下它们仍然还是“很小”的，因为还存在着不可数序数，甚至有一个比一个更大的无穷序数，但是没有最大的序数。

2. 基　数

(3·4) 中所列出的无穷序数都是可数序数。我们从这些序数中挑选出一个来表示可数集合的势，并把它称为基数。挑选哪一个呢？自然会想到其中最小的一个ω。由此启示我们给出基数的一般定义。

定义 设α是一个序数。如果对于任一序数β，当$\beta<\alpha$时，有$\overline{\overline{\beta}}<\overline{\overline{\alpha}}$，则称序数$\alpha$为基数。

由基数的定义立即推出：

任一自然数n都是基数。

ω是基数。序数ω当做基数使用时，记为$\aleph_0$。即$\aleph_0=\omega$。前面我们已经用$\aleph_0$表示可数集合的势。

除了ω外，（3·4）式中其余的无穷序数都比ω大，但其势却与ω的势相等（因为都是可数的！），因此，都不是基数。

到现在为止，我们仅有一个无穷基数$\aleph=\omega$。为了得到更大的无穷基数，我们将（3·4）中所枚举的序数全部汇集在一起，并将它们组成的集合记做ω_1，即

$$\omega_1:=\{\alpha|O_n(\alpha)\wedge\overline{\overline{\alpha}}\leqslant\aleph\}$$

其中$O_n(\alpha)$表示α是序数。

可以证明：ω_1是序数，并且将序数依从小到大的顺序排列起来的话，ω_1是位于所有可数序数之后的第一个不可数序数。

从ω_1开始，采用前面构造序数的办法，我们又能得到无穷序数的无穷序列：

$$\omega_1,\ \omega_1+1,\ \cdots,\ \omega_1\cdot2\ ,\cdots\cdots,\omega_1^2,\ \cdots\cdots\ \omega_1^{\omega},\ \cdots\cdots \qquad (3\cdot5)$$

并且（3·5）中枚举的无穷序数都是等势的，其中最小的一个是ω_1，ω_1满足基数的条件，我们得到第二个无穷基数ω_1。当ω_1当做基数使用时，有时记做$\aleph_1$，即$\aleph_1=\omega_1$。

仿照ω_1的构造过程，我们可以再构造一个集合

$$\omega_2 := \{\alpha \mid O_n(\alpha) \wedge \overline{\overline{\alpha}} \leqslant \aleph_1\}$$

则ω_2是第三个无穷基数，并且记$\aleph_2=\omega_2$。

继续进行下去，对于任一序数α，当我们定义了$\aleph_\alpha$之后，令

$$\omega_{\alpha+1} := \{\beta \mid O_n(\beta) \wedge \overline{\overline{\beta}} \leqslant \aleph_\alpha\}$$

则得到比$\aleph_\alpha$大的第一个无穷基数$\aleph_{\alpha+1}=\omega_{\alpha+1}$。这样一来，对于一个后继序数$\alpha$，都有一个无穷基数$\aleph_\alpha$。

当α为极限序数时，我们令

$$\omega_\alpha := \{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$$

可以证明，ω_α是基数，记做$\aleph_\alpha$，并且$\aleph_\alpha$是比所有$\aleph_\beta\,(\beta<\alpha)$大的第一个无穷基数。

总之，对于任一序数α，相应地都有一个无穷基数$\aleph_\alpha$，我们就得到无穷基数组成的无穷序列：

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots,\ \aleph_\alpha,\ \cdots\cdots \tag{3·6}$$

它们是按照从小到大的顺序排列的，即当序数$\alpha<\beta$时，总有$\aleph_\alpha<\aleph_\beta$。并且在$\aleph_\alpha$与$\aleph_{\alpha+1}$之间不再有其它的无穷基数。

无穷序数与无穷基数也称为超限序数和超限基数，或者统称为超限数。

我们在前面已经看到，可数序数就相当复杂，现在又有了不可数基数$\aleph_\alpha$（$\alpha\geqslant1$）。而且势为$\aleph_\alpha$的无穷不可数的序数又有无穷多个。这样一来，不仅有了不可数序数，而且不可数序数又分成了无穷多个等级，每一等级中都包括了无穷无尽的序数。而对每一个序数α，相应地又有一个无穷基数$\aleph_\alpha$，可见基数序列(3·6)是一个相当庞大的"家族"。

但是，在现代集合论中，又引进了弱不可达基数，强不可达基数。一旦进入不可达基数的领域，又可以定义越来越大的基数：超不可达基数、马洛基数、超马洛基数，弱紧基数、强紧基数与一般的可测基数，它们中最小的分别一个比一个大，构成了一个等级森严的基数王国。我们在（3·6）中指出的只是这个王国中一个微不足道的小家族。

康托尔将自然数推广到无穷序数和无穷基数，为我们度量各类无穷集合创造了足够丰富的

超限数。康托尔这一惊人的创造对数学理论发展的贡献是不可估量的。虽然韦尔认为康托尔“关于$\aleph$的等级是雾上之雾”，实际上超限数是19世纪最值得夸耀的数学成果之一，是数学思想史上最惊人的产物。

3．基数的初等运算

对于基数也可以建立加法、乘法以及乘幂的运算。为了使问题阐述的更清楚，以便初学者能正确地理解这部分内容，我们从两个基数的和与积谈起。

定义1　给出两个基数k_1和k_2，取两个互不相交的集合S_1和S_2（即$S_1\cap S_2=\phi$），并且使$k_1=\overline{\overline{S_1}}$，$k_2=\overline{\overline{S_2}}$，则$S_1\cup S_2$的势称为$k_1$与$k_2$的和，记做$k_1+k_2$。

当k_1，k_2为有穷基数，即自然数时，上述定义与两个自然数的和是一致的。

定义2　给出两个基数k_1和k_2，取两个集合S_1和S_2，使$k_1=\overline{\overline{S_1}}$，$k_2=\overline{\overline{S_2}}$，则集合$S_1\times S_2$的势称为$k_1$与$k_2$的积，记做$k_1\cdot k_2$。

例如，如果$k_1=2$，$k_2=3$。可取$S_1=\{a, b\}$，$S_2=\{1, 2, 3\}$，则

$$S_1\times S_2=\{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,3\rangle\}$$

它的元素共有6个。即其势为6。由积的定义，得出$2\cdot 3=6$这个小学生都知道的结论。这就是说，当k_1，k_2为有穷基数时，定义2就是自然数的乘法。

但是，一旦涉及到无穷基数时，将出现许多新的性质。例如，我们已将自然数集合的基数记为$\aleph_0$，实数集合的基数记为$\aleph$。利用可数集合和实数集合的性质（参看第二章）我们得到：

$$\aleph_0+1=\aleph_0;$$

$$\aleph_0+n=\aleph_0,\quad n\text{为任一自然数};$$

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0;$$

$$\aleph_0+\aleph=\aleph;$$

$$\aleph+\aleph=\aleph;$$

$$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0;$$

$$\aleph\cdot\aleph=\aleph.$$

这是无穷基数所特有的一些性质。

为了将两个基数的和与积的概念推广到一般情况，我们先引入指标集合的概念。假设I是一个集合，对于每一个$i\in I$，唯一地确定一个基

数 $f(i)$。则我们得到一簇基数 $\{f(i)|i\in I\}$。我们称 I 为指标集合。值得注意的是，这里指标 i 不一定是自然数，只要求它是 I 的元素，而 I 可以是任何一个集合。

例如，设 I 是实数集合 $\{i|0\leqslant i\leqslant 3\}$。如令

$f(i)=1$，当 i 为整数时，

$f(i)=2$，当 i 为非整数的有理数时。

$f(i)=\aleph_0$，当 i 为无理数时。

则在基数族 $\{f(i)|i\in I\}$ 中，数 1 出现四次，数 2 出现 $\aleph_0$ 次，$\aleph_0$ 出现 $\aleph$ 次。

定义 3 设 I 是一指标集合，对于任意的 $i\in I$，k_i 都是基数，则 $\{k_i|i\in I\}$ 是一簇基数。任取一个集合簇 $\{S_i|i\in I\}$，使它满足条件

(i) $\overline{\overline{S_i}}=k_i$，对 $\forall i\in I$。

(ii) $S_i\cap S_j=\phi$，对 $\forall i, j\in I$ 且 $i\neq j$ 时。条件 (ii) 是说明集合簇的元素是两两不相交的。令

$$\sum_{i\in I}k_i := \overline{\overline{\bigcup_{i\in I}S_i}} \tag{3·7}$$

称 $\sum\limits_{i\in I}k_i$ 为基数簇 $\{k_i|i\in I\}$ 的和。

当 $I=\omega$ 时，$\sum\limits_{i\in\omega}k_i$ 记做 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}k_i$。

例如，为了求所有自然数的和，我们可取 $S_0=\phi$，$S_1=\{0\}$，$S_2=\{1, 2\}$，$S_3=\{3,4,5\}$，…。则对任意 $i\in\omega$，有 $\overline{\overline{S_i}}=i$。由 $\bigcup_{i\in\omega}S_i=\omega$，其基数为 $\aleph_0$。所以

$$\sum_{i\in\omega}i=0+1+2+3+\cdots=\aleph_0\text{。}$$

同理可以得到，当 $n\in\omega$ 且 $n\neq 0$ 时。有

$$n+n+n+\cdots=\aleph_0\text{。}$$

特别是

$$1+1+1+\cdots=\aleph_0\text{。}$$

定义4 设 I 是任一集合，对于任意的 $i\in I$，k_i 都是基数，即 $\{k_i|i\in I\}$ 是一簇基数。任取集合簇 $\{S_i|i\in I\}$，使得 $k_i=\overline{\overline{S_i}}$。令

$$\prod_{i\in I}S_i:=\{f|f:I\longrightarrow\bigcup_{i\in I}S_i\text{且对于任意的}i\in I\text{，都有}f(i)\in S_i\}$$

(3.8)

称 $\prod_{i\in I}S_i$ 为此集合簇的广义卡氏积。令

$$\prod_{i\in I}k_i:=\overline{\overline{\prod_{i\in I}S_i}} \qquad (3\cdot 9)$$

并称 $\prod_{i\in I} k_i$ 为基数簇 $\{k_i | i\in I\}$ 的积。

为了说明当 $I=\{1,2\}$ 时，定义 4 的特殊情形就是定义 2。我们取 $S_1=\{a, b\}$， $S_2=\{l, m, n\}$ 则满足条件 $f(i)\in S_i$ 的函数 $f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} S_i$ 共计有六个：

f_1: $f_1(1)=a$, $f_1(2)=l$；

f_2: $f_2(1)=a$, $f_2(2)=m$；

f_3: $f_3(1)=a$, $f_3(2)=n$；

f_4: $f_4(1)=b$, $f_4(2)=l$；

f_5: $f_5(1)=b$, $f_5(2)=m$；

f_6: $f_6(1)=b$, $f_6(2)=n$。

即 $\prod_{i\in I} S_i$ 共有六个元素，其基数是6。而 $\overline{\overline{S_1}}=2$，$\overline{\overline{S_2}}=3$。由定义 4，得到 $2\cdot3=6$。这与前面所得结果是相同的。也就是说，定义 4 是定义 2 的一种合理的推广。

类似于自然数的幂 $n^2=n\cdot n$，对于基数也可以引入幂的概念，对于任意的基数 k，为了得到 $k^2=k\cdot k$，只要在定义 2 中取 $\overline{\overline{S_1}}=\overline{\overline{S_2}}=k$ 即可。但是，为了把指数也推广到无穷基数，我们采用

另一种定义方式。

定义5 设k和λ是两个基数，且S_1和S_2是任取的两个适合条件$\overline{\overline{S_1}}=k$，$\overline{\overline{S_2}}=\lambda$ 的集合。令

$$k^{\lambda}:=\overline{\overline{S_1\uparrow S_2}} \qquad (3\cdot 10)$$

并称k^{λ}为k对λ的超幂。其中

$$S_1\uparrow S_2=\{f\mid f:S_2\longrightarrow S_1\} \qquad (3\cdot 11)$$

称为S_1对S_2的超幂，或由集合S_1到集合S_2的超幂。

假若我们取$S_1=\{1,\ 2\}$，$S_2=\{a,\ b,c\}$，则$\overline{\overline{S_1}}=2$，$\overline{\overline{S_2}}=3$。不难验证，从$S_2$到$S_1$的函数$f$一共有八个，即$\overline{\overline{S_1\uparrow S_2}}=8$，由（3·10）得$2^3=8$。

基数的运算具有很多性质，其中有些性质与自然数相应的运算性质是相同的，但是应当引起注意的是有关无穷基数的一些特殊性质。我们在这里不加证明地给出一些性质。

性质1 $\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\max(\aleph_\alpha,\ \aleph_\beta)$

(3·12)

$$\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta=\max(\aleph_\alpha,\ \aleph_\beta)$$

(3·13)

这一性质表明，当两个无穷基数相加或相乘时，

其和与积是相同的，并且等于其中较大的一个，较小的被较大的基数吸收了。由此亦可推出：一个自然数与一个无穷基数的和或积等于这个无穷基数，但要注意，在求积时，$n\neq 0$。

性质 2 若$k_1\leqslant\lambda_1$，$k_2\leqslant\lambda_2$，则有

$$k_1+k_2\leqslant\lambda_1+\lambda_2,\quad k_1\cdot k_2\leqslant\lambda_1\cdot\lambda_2 \tag{3·14}$$

成立。

这里要指出的是，由$k_1\leqslant\lambda_1$和$k_2<\lambda_2$成立，或者由$k_1<\lambda_1$和$k_2\leqslant\lambda_2$成立，不能保证$k_1+\lambda_1<k_2+\lambda_2$和$k_1\cdot k_2<\lambda_1\cdot\lambda_2$成立。

例如：$2<3$，$\aleph_0=\aleph_0$ 但

$$2+\aleph_0=\aleph_0=3+\aleph_0,\ 2\cdot\aleph_0=\aleph_0=3\aleph_0.$$

性质 3 设 I 为一指标集合，对于每一个 $i\in I$，k_i都是基数，并且 λ_1，λ_2，k 是给定的基数，则有下列等式成立：

$$\prod_{i\in I}k^{k_i}=k^{\sum_{i\in I}k_i} \tag{3·15}$$

$$\prod_{i\in I}k_i^{k}=\left(\prod_{i\in I}k_i\right)^{k} \tag{3·16}$$

$$(k^{\lambda_1})^{\lambda_2}=k^{\lambda_1\cdot\lambda_2} \tag{3·17}$$

这三个等式是通常算术中相应等式

$$m^n \cdot m^q = m^{n+q}, \quad m^n \cdot p^n = (m \cdot p)^n,$$

$(m^n)^q = m^{n \cdot q}$ 的推广。

利用以上性质，立即可以推出对于任意的 $n \in \omega$ 但 $n \neq 0$ 时，有

$$(2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0 \cdot n} = 2^{\aleph_0} \tag{3·18}$$

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} \tag{3·19}$$

四 什么是连续统假设



在序列（3·6）中，我们按照从小到大的顺序，枚举出了无穷基数的无穷序列

$$\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_\omega, \cdots, \aleph_\alpha, \cdots\cdots \qquad (4·1)$$

并且我们已经指出，基数是为了度量无穷集合的大小而引入的，即我们想用基数来表示无穷集合的势。另一方面，从自然数集合 ω 出发，将 ω 的势记为 $\aleph_0$，依据康托尔定理，我们曾得到无穷势的无穷序列

$$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \cdots\cdots \qquad (4·2)$$

它们也是由小到大排列的，分别表示集合

$$\omega, P(\omega), P(P(\omega)), \cdots\cdots$$

的势。若令 $\beth_0 = \aleph_0$，$\beth_1 = 2^{\aleph_0}$，$\beth_2 = 2^{2^{\aleph_0}}$，……则（4·2）可改写为：

$$\beth_0, \beth_1, \beth_2, \cdots \qquad (4·3)$$

其中 $\beth$ 是希伯来文，读做贝斯。

序列（4·3）中，$\beth$ 的下标只能取自然数，而序列（4·1）中$\aleph$的下标却是取序数，二者所含项数是相差得很多的。但是，我们可以超穷归纳地定义一个$\beth$的无穷序列，使其下标也能取所有的序数。为此，令

$$\beth_0 := \overline{\overline{\omega}} = \aleph_0.$$

$\beth_{\alpha+1} := \overline{\overline{P(S_\alpha)}}$，其中$\overline{\overline{S_\alpha}} = \beth_\alpha$，当 α 是极限序数时，令

$$\beth_\alpha := \overline{\overline{\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta}} \text{其中} \overline{\overline{S_\beta}} = \beth_\beta.$$

这样一来，我们得到无穷势的无穷序列：

$$\beth_0, \beth_1, \beth_2, \cdots, \beth_\omega, \cdots, \beth_\alpha, \cdots \qquad (4·4)$$

其中 $\beth$ 的下标遍取序数。

基数序列（4·1）和势序列（4·4）有什么关系呢？显然，从定义知道$\beth_0 = \aleph_0$，也就是它们的首项是相等的。其它的$\beth$，例如$\beth_1$会不会在$\aleph$的序列(4·1)中出现呢？如果$\beth_1$根本不在(4·1)中出现，那么我们想用基数来表示势的希望就破灭了。我们在这里不加证明地指出，当承认选择公理时，$\beth_1$以及序列（4·4）中的其它$\beth$，都会出现在$\aleph$的序列（4·1）中，即序列（4·4）中的每一个势都是一个基数。

$\beth_1 = 2^{\aleph_0}$，由康托尔定理，$\aleph_0 < \beth_1$，$\beth_1$是不

可数基数，而是大于$\aleph_0$的第一个不可数基数，于是立即得到不等式：

$$\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0} \qquad (4\cdot5)$$

这里自然产生了一个问题：（4·5）式中是等号成立还是不等号成立呢？如果是$\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$成立，则应有$\aleph_2 \leqslant 2^{\aleph_0}$。究竟$2^{\aleph_0}$应该在序列（4·1）的哪个位置上呢？这是一百多年前集合论研究中提出的一个重要问题。

1．康托尔猜想

1878年，康托尔在一篇论文的结尾处作为一个估计，就猜想（4·5）式中应是等号成立。即

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad (4\cdot6)$$

83 年，在《关于无穷线性点集（5）》中讲到连续统的势时，他就希望不久的将来，将能够严格地证明连续统的势$\aleph$就是第二个无穷基数$\aleph_1$。在《关于无穷线性点集（6）》中，他认为（4·6）式是可以证明的。据说，他曾经声称，已经证明了$2^{\aleph_0} = \aleph_1$并且即将公布其证明。但是，直至1918年1月6日康托尔去世，也没有把他的证明公布于众。大概是发现他原来的证明有错误

而未公开发表。这位贡献卓著的伟大数学家在临离开人世以前，还对没有解决这一问题表示遗憾。

现在人们称康托尔猜想，即式（4·6）成立为连续统假设。连续统假设的英文为Continuum hypothesis，因此（4·6）式常缩写为CH。

这个假设前面为什么要加上“连续统”三个字呢？这里首先要搞清楚连续统的势等于 $2^{\aleph_0}$ 的问题。为此，只需要证明集合$[0,1]$与集合$P(\omega)$之间存在一一对应即可。

事实上，对每一个数$x\in[0,1]$，按照二进制数的表示法，x可表示为

$$0.a_0a_1a_2\cdots a_n\cdots \qquad (4\cdot7)$$

其中a_i为0或1，并且这种表示法是唯一的。数0表示为0.000……，小数点后面全是0；数1表示为0.111……，小数点后面全是1。于是，对每一个数x，可得到自然数集合上的一个函数$f:\omega\to\{0,1\}$，使得$f(n)=a_n$。这时，式（4·7）可以写为

$$0.f(0)f(1)f(2)\cdots f(n)\cdots \qquad (4\cdot8)$$

同时，由函数f可确定ω的一个子集合

$$S_x:=\{n\mid f(n)=1\wedge n\in\omega\} \qquad (4\cdot9)$$

显然，从由$x\in[0,1]$得到S_x的过程中，当

$x_1, x_2 \in [0,1]$且$x_1 \neq x_2$时，必有$S_{x_1} \neq S_{x_2}$。这一对应关系是一对一的。记此对应为g。

反过来，对于每一个$S \in P(\omega)$，即S是ω的子集合，则它的特征函数如下：

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{当} n \in S \text{时}, \\ 0, & \text{当} n \notin S \text{时}. \end{cases}$$

对于这样的函数f，由（4·8）式可以得到一个二进制数x。显然，$x \in [0,1]$。这就是说，上述对应g是满射。

因此，g是$[0,1]$与$P(\omega)$之间的一一对应。所以$\overline{\overline{[0,1]}} = \overline{\overline{P(\omega)}}$，即$\aleph = 2^{\aleph_0}$。

由于实数集合与$[0,1]$中的数集合等势，这就说明实数系，即连续统的势$\aleph$等于$2^{\aleph_0}$。

于是，实数有多少的问题，或者直线上有多少点的问题，也就是自然数集合有多少子集合的问题。这个问题称为连续统问题。等式（4·6）认为实数有$\aleph_1$个，但又无法证明它，所以人们才称它为连续统假设。

连续统假设的另一形式。

连续统假设还有其它的叙述方式。假设$2^{\aleph_0} = \aleph_1$成立。因为我们已经知道，在$\aleph_0$与$2^{\aleph_0}$之间没有其它的基数，这样，在$\aleph_0$与$2^{\aleph_0}$之间也就没有其它的基数了。因此连续统假设就是说，实数集合

R的任一无穷子集合，它的基数或者是可数的(即为$\aleph_0$)，或者是$2^{\aleph_0}$，即它与实数集合R的基数相同。如果把R的有穷子集也考虑在内，则连续统假设可以用符号缩写为：

$$\forall S(S\subseteq R\rightarrow \overline{\overline{S}}\leqslant \aleph_0\vee \overline{\overline{S}}=2^{\aleph_0}) \quad (4\cdot 9)$$

此式的意思就是：如果S是实数集合的任一子集合，那末，它或者是有穷集合，或者是可数无穷集合，或者是与R有同一基数的无穷集合。

前面我们证明了实代数数集合是可数集合，从而肯定了实超越数是存在的。实超越数集合是R的无穷子集合，它不可能是可数的。因为不然的话，R将是两个可数集合的并集合，R就成为可数集合了。由（4·9）立即知道，超越数集合的基数是$2^{\aleph_0}$。尽管要证明一个实数是超越数是相当复杂的，需要高度的技巧，但我们在这里却轻而易举地得出一个惊人的结论：实超越数与实数竟然一样多！

2. 广义连续统假设

将连续统假设加以推广，豪斯道夫于1908年提出：对于任意的序数α，应有等式

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1} \qquad (4\cdot10)$$

成立。其实康托尔在1883年就估计到$2^{\aleph_1}=\aleph_2$应该成立。这只是（4·10）式的特殊情形，即$\alpha=1$的情形，当$\alpha=0$时，（4·10）即变为（4·6）。所以连续统假设也是（4·10）式的特殊情形。现在人们称（4·10）式为广义连续统假设。

广义连续统假设也有另外一种形式，即如果k是任一无穷基数，则不存在无穷基数λ，使得不等式

$$k<\lambda<2^k$$

成立。这就是说，在k与2^k之间再也没有其它的基数了。

3. 希尔伯特的评价

著名数学家希尔伯特，于1900年夏天，在巴黎举行的第二次国际数学家代表大会上，做了题为《数学问题》的演说，提出了二十三个未解决的问题，向20世纪的数学家们提出挑战。其中第一个问题就是，“证明连续统假设。”他说，“康托尔关于这种集合的研究，提出了一个似乎很合理的定理，可是尽管经过坚持不懈的努力，

还没有人能够成功地证明这条定理。这一定理就是：每个由无穷多个实数组成的系统，亦即实数集合R的无穷子集合（或点集合），或者与自然数1,2,3,……组成的集合对等，或者与全体实数组成的集合对等，从而与连续统（即一条直线上的点的全体）相对等；因此，就对等关系而言，实数的无穷子集合只有两种：可数集合和连续统。”他接着又说：“由这条定理，立即可以得出结论：连续统所具有的基数，紧接在可数集合的基数之后；所以，这一定理的证明，将在可数集合与连续统之间架起一座新的桥梁。”希尔伯特的这些话，充分地体现了他对连续统假设的高度评价。

连续统问题是数学问题来源于几何、力学和物理等方面的现实问题的一个范例。希尔伯特说：“数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢？在每个数学分支中那些最原始、最古老的问题肯定是起源于经验，是由客观世界外部的现象提出来的。……但是，随着一门数学分支的进一步发展，人类的智力，受到成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着，通常并不受来自外部世界的明显影响，而只是借助于逻辑的组合、一般化、特殊化、巧妙地对概念

进行分析与综合，提出新的富有成效的问题。”希尔伯特曾严肃地批评一些数学家片面理解数学的严格性，他说：“在坚持把证明的严格性作为完善地解决问题的一种要求的同时，我反对这样一种意见，即认为只有分析的概念，甚至只有算术的概念才能严格地加以处理。这种意见，有时为一些颇有名望的人所提倡，我认为是完全错误的。对于严格性要求的这种片面理解，会立即导致对一切从几何、力学和物理中所提出的概念的排斥，从而堵塞来自外部世界的新的材料源泉，最终实际上必然会拒绝接受连续统和无理数的思想。这样一来，由于排斥几何学和数学物理，一条多么重要的、关系到数学生命的神经被切断了！”

希尔伯特的意见是十分清楚的，连续统问题来自外部世界，纯数学需要从外部世界中汲取新的材料，外部世界是数学的源泉。被一些人指责为脱离实际，所谓数学只是符号游戏的形式主义者希尔伯特，原来是如此热情地坚持数学与外部世界的联系，把它提到“数学生命的神经”这样的高度。

正因为连续统问题是数学中一个最基本的问题，或者说它是数学基础的问题，长期以来一直

是数理逻辑（特别是它的一个分支——公理集合论）的一个中心问题．一百多年来，虽然经过许多著名数学家的精心钻研，取得了一些重大进展（这些进展将在以后各章给以较详细的说明），但还没有完全解决问题，还是数理逻辑的中心问题，或者中心问题之一．一些著名的数学家为寻求其正确的答案在坚持不懈地奋斗。连续统问题的最终解决，将给数学带来巨大的影响．

4．希尔伯特的失误与启示

连续统假设问题一直没有得到解决，1925年，已经六十三岁、身患多种疾病而且确诊患有恶性贫血症的希尔伯特，又提出了试图证明连续统假设成立的大纲．他认为按照他的大纲就可以证明$2^{\aleph_0}=\aleph_1$．遗憾的是这位著名的数学家的证明出了漏洞，后人发现他在大纲中利用了一个误认为是正确的结论，即“自然数集合的每一子集合都是递归集合．”

递归的概念并不难理解，它的要点在于机械性与有穷性．当考虑自然数集合ω上的一个函数f时，如果有一种机械的方法（或规则），使得

对于任一自然数 n，都能按照这一机械的方法，在有穷步骤内求出函数值 $f(n)$，则称 f 为一递归函数。例如，令

$$f(0)=1$$

$$f(n+1)=f(n)\cdot(n+1) \quad (n\text{是自然数})$$

则 $f(n)=n!$ （n 的阶乘）。此阶乘函数 f 就是一个递归函数。

一个递归函数的值域称为递归可枚举集合。如果一个递归可枚举集合 S 的补集合也是递归可枚举集合，那末，我们就把 S 称为递归集合。自然数集合 ω 的子集合 S 是递归的，就意味着集合 S 及其补集合 $\omega-S$（即由不属于 S 的自然数组成的集合）都是递归可枚举的。

希尔伯特以为自然数集合 ω 的所有子集合都是递归的。但是，随着递归函数论发展与算法概念的逐步精确化，在本世纪三十年代发现，递归集合只有 $\aleph_0$ 个，即只有可数多个递归集合。如前所述，自然数集合 ω 的幂集合共有 $\overline{\overline{P(\omega)}}=2^{\aleph_0}$ 个，即有不可数无穷多个。所以存在着大量的由自然数组成的集合不是递归集合。希尔伯特在这个问题上失误了。

现在已经弄清楚，不能证明 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ 的根本原因，正如希尔伯特在1900年的演说中指出的，

“是在不充分的前提或不正确的意义下寻找问题的解答，因此，不能获得成功。”于是又向数学家们提出了这样的任务：“证明在所给的和所考虑的意义下，原来的问题是不可能解决的。”

历史的发展说明，连续统假设确实是一个困难的问题。也可能是由于康托尔、希尔伯特这样的大数学家都证明过它，而又没有证明出来，使连续统假设更加出名，引起了众多数学家的关注，在本书的最后两章，我们将要介绍哥德尔1938年的结果：如果集合论的ZF公理系统是协调的，那末，加上连续统假设以后仍然是协调的。也就是说，在ZF公理系统中，推导不出连续统假设不成立的结论。另外还要介绍科恩的成果：在ZF公理系统中，连续统假设是不能证明的。

哥德尔和科恩的工作是在前人所做的基础上获得的，哥德尔认为，人们“在评价希尔伯特有关连续统问题的工作时，往往忽略了这一点：假如不去追究问题的细节，他那个非常重要的一般概念也被证明是完全正确的，即连续统问题的解决将依赖于从数学基础中引出全新的方法。尤其是，他的思想中似乎还蕴涵了这种观点（虽然希尔伯特没有说的这样明白）：连续统假设在通常的集合论公理下是不可判定的。”

哥德尔与科恩，正确地总结了前人的经验与教训，创立了全新的方法，才获得了重要的成果。

5. 等价命题与推论

连续统问题的最终解决，将给整个数学带来巨大的影响. 集合论中提出的连续统假设，在数学的各个领域特别是在实变函数论中，有很多等价命题及推论. 谢宾斯基在他的《连续统假设》（1934年出版）的专著中，列举了十二个与连续统假设在逻辑上等价的数学命题，同时又给出了连续统假设的八十二个推论. 近年来，人们在它的推论方面又作出了新的贡献. 我们在这里摘录一些，以飨读者. 对这方面有兴趣的读者，可以阅读有关专著.

1）连续统假设的等价命题.

（1）平面上所有的点的集合是两个集合的并，其中一个集合在所有与 x 轴平行的直线上至多是可数的，另一个集合在 y 轴的所有平行线上至多是可数的.

（2）平面是可数条曲线的并；

(2a) 三维空间是可数条曲线的并。

（3）存在着实变数的单叶函数序列f_1, f_2, $f_3, \cdots$，使得对于任意的不可数的实数集合S，序列中除去有穷个函数外，所有的函数都映S为全体实数集合；

(3a) 存在着实变数的集值函数f，且对于每一个实数x其值$f(x)$是一个可数集合，它把每一个不可数的实数集合映射为全体实数集合R。

（4）存在一簇集合A_x^i（其中i为自然数，x为实数）使得

① $R = \bigcup_{x \in R} A_x^i$，对于$i = 1, 2, 3, \cdots$；

② $A_x^i \cap A_y^i = \phi$，对于$x \neq y$，$i = 1, 2, 3, \cdots$

③ S是任意不可数的实数集合，存在着自然数n，使当$i \geq n$时，对于所有的实数x，集合$S \cap A_x^i$是非空的。

(4a) 存在一簇集合A_x^i，其中$i = 1, 2, 3, \cdots$，x遍历全体实数，适合命题4中的条件(1)和(2)以及下列条件：

(4b) 对任意的实数x，集合$R - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_x^i$至多是可数的。

（5）存在实变数函数序列$f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots$，使得对于任意的实数序列$y_1, y_2, y_3, \cdots$，以及每

个 x，至多除去可数个值（它依赖于序列$y_1, y_2, y_3, \cdots$），对应地有一个无穷递增的指标序列$k_1, k_2, k_3, \cdots$（依赖于 x 和序列$y_1, y_2, y_3, \cdots$），使得等式$f_{k_i}(x) = y_{k_i}$，$i = 1, 2, 3, \cdots$。

（6）全体实数集合R是可数个递增的集合的并。

（7）存在一个线性解析集合，它不是少于$2^{\aleph_0}$个波雷耳可测集的并集合.

（8）E为任意元素构成的集合，Φ是由E的子集合构成的基数$\leqslant 2^{\aleph_0}$的簇，并且E不是簇Φ中$\aleph_0$个集合与一个至多可数的集合的并集合。在这些条件下，E包含一个不可数集S，使得簇Φ中每一个集至多只有可数个公共元素。

（9）每个基数小于$\aleph_1$的线性集合的测度为零。

（10）在希尔伯特空间内，存在一个不可数的点集，它的每个不可数子集合不能同胚于欧几里得空间的一部分。

2）连续统假设的若干推论。

（1）存在实数集R的一个不可数子集S，它和R的每一个无处稠密集合的交集合至多是可数的。

（2）存在实数集合R的一个不可数集合

S，它的每个连续象的测度为零。

（3）在 R 的一个不可数子集合 S 上存在一个连续函数 f，使得它在 S 的任一不可数子集合上不是一致连续的。

（4）存在一个实变数函数的无穷序列 f_1，$f_2, f_3, \cdots$，它在每个不可数集合上收敛但不一致收敛。

（5）存在实变函数的无穷序列 $f^m(m=1,2,3,\cdots)$ 及实变函数的二重序列 $f_n^m(m=1,2,3,\cdots; n=1,2,3,\cdots)$ 使得

①$\lim\limits_{n\to\infty} f_n^m(x)=f^m(x)$，$m=1,2,3,\cdots$，

②$\lim\limits_{m\to\infty} f^m(x)=0$，

以及对自然数的任一无穷递增序列 $m_1<m_2<m_3<\cdots$ 和指标的无穷序列 $n_1, n_2, n_3, \cdots$，有

③等式 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}^{m_k}(x)=0$ 仅对 x 的至多可数个值成立。

（6）设 $S=\{k_i\}$ 和 $T=\{n_i\}$ 是两个自然数的无穷序列，如果对于所有的 $i=1,2,3,\cdots$ 都有 $n_i\leqslant k_i$，我们记为 $T\prec S$。存在着基数为 $2^{\aleph_0}$ 的集合 F，F 的元素是自然数的无穷序列，使得 F 适合下列条件：对于自然数的无穷序列 S（无论 S 是否属于 F），集合 F 中适合 $T\prec S$ 的所有序列 T 构成的子集至多是可数的。

（7）存在一些实数集合，在它们上面存在0类，1类，2类的贝尔函数，但在每个集合上不存在3类贝尔函数。

（8）存在着集合的二重序列S_n^i，使得

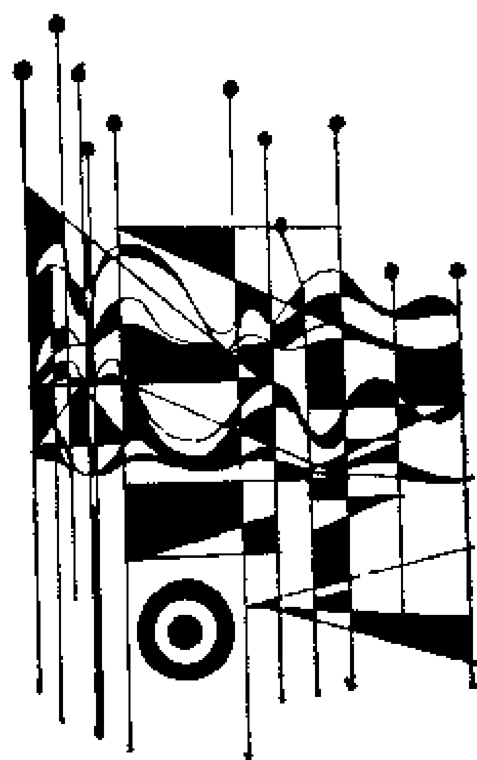
① $R=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_n^i$，$i=1,2,3,\cdots$

② 对于固定的i，当$n\neq m$时，$S_n^i\cap S_m^i=\phi$，

③ 对于任何正整数序列$k_1,k_2,k_3,\cdots$，乘积集合$\prod_{i=1}^{\infty}(S_1^i\cup S_2^i\cup\cdots\cup S_{k_i}^i)$至多是可数的。

从上面列举出的一些命题可以看出，承认连续统假设和广义连续统假设，对于许多数学定理的证明是极其有用的。当然，这并不是说连续统假设就是正确的了。恰恰相反，人们从考察它的推论中若干命题的真伪性，也就反转回来推演连续统假设的真伪性了。比如，当人们能够确切地证明连续统假设的某一推论是假的，那也就证明了连续统假设不能成立了。这仍然是解决连续统假设的一个研究方向。

五 蔻尼对$2^{\aleph_0}$的限制



连续统问题是要求回答：连续统的势 $2^{\aleph_0}$应该在无穷基数的无穷序列

$$\aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_n, \cdots, \aleph_\omega, \cdots \cdots \quad (5\cdot1)$$

的哪个位置上，即究竟$2^{\aleph_0}$等于序列（5·1）中哪一个呢？前面我们已经指出，到目前为止，还没有一个肯定的回答，仍然是一个困难问题。

蔻尼在研究无穷基数的运算时，得到了一个不等式，由此不等式虽然不能说明$2^{\aleph_0}$应该等于什么，但是，它能说明$2^{\aleph_0}$不能等于（5·1）中的哪些值，是对$2^{\aleph_0}$的一种限制性结论。

为了弄清楚蔻尼的限制，需要再作一些准备性的工作，特别是共尾序数的概念及其相应的性质。

1. 共尾序数

共尾性概念对于$2^{\aleph_0}$的限制是重要的，因此，我们要较详细地加以叙述。

定义1

1）一个函数f，如果它的定义域是一个序数（注意：序数是集合，可以作为函数的定义域），f的取值也是序数，则称f为序数函数。

2）设f是一个序数函数，如果对于其定义域中的任意两个序数α和β，当$\alpha<\beta$（即α是β的真子集合）时，必有$f(\alpha)<f(\beta)$，则称f是严格单调递增的序数函数。

定义2 假设α和β是两个序数，如果$\beta\leqslant\alpha$（即β是α的子集合），并且存在着一个严格单调递增的序数函数$f:\beta\to\alpha$，使得对于任一$\gamma<\alpha$（即$\gamma\in\alpha$），都存在一个$\delta<\beta$，使$f(\delta)\geqslant\gamma$成立，那末，我们就说序数α共尾于序数β，记做$\mathrm{cof}(\alpha,\beta)$。

序数α共尾于序数β，必需具备三个条件：第一，$\beta\leqslant\alpha$，即β是α的子集合；第二，存在一个严格单调递增的序数函数f，使得$\mathrm{dom}(f)=\beta$，

$\mathrm{ran}(f)\subseteq\alpha$；第三，$\alpha$ 中的每一个元素要小于或者等于 f 的值域中的某一元素。

例1　如果 α 是任一后继序数，则 $\mathrm{cof}(\alpha,1)$。

事实上，因为 α 是后继序数，则有 $1\leqslant\alpha$，第一个条件成立；α 是后继序数，一定存在一序数 β，使得 $\alpha=\beta+1=\{0,1,2,\cdots,\beta\}$，$\mathrm{dom}(f)=1=\{0\}$，令 $f(0)=\beta$，则 f 是从 1 到 α 的一个严格单调递增的函数，并且 α 中的任一 γ，都有 $\gamma\leqslant\beta=f(0)$，我们所定义的函数 f 具有共尾性定义中的第二和第三个条件，因此，序数 α 共尾于序数 1，即 $\mathrm{cof}(\alpha,1)$。

由例1知道，任何一个后继序数 α 共尾于1，这样看来，共尾的概念对于后继序数是没有什么意义的，主要是针对极限序数才考虑共尾概念。

例2　$\omega\cdot2$ 共尾于 ω，即 $\mathrm{cof}(\omega\cdot2,\omega)$。

事实上，$\omega<\omega\cdot2$，即 ω 是 $\omega\cdot2$ 的子集合，我们只需建立适合定义2中要求的序数函数 f。为此只要令

$$f(n)=\omega+n$$

其中 n 为自然数，则 $\mathrm{dom}(f)=\omega$，函数值 $f(n)\in\omega\cdot2$，且 f 的值域

$$\mathrm{ran}(f)=\{\omega+n\mid n\in\omega\}$$

对于任一序数 $\alpha<\omega\cdot2$，当 $\alpha\leqslant\omega$ 时，我们有 $\alpha\leqslant$

$f(0)=\omega$；当$\omega<\alpha<\omega\cdot 2$时，必存在$n\in\omega$，使得$\alpha=\omega+n$，于是$\alpha=\omega+n=f(n)$。因此，序数函数$f$满足定义2中的要求，所以cof$(\omega\cdot 2,\omega)$。

例3　$\aleph_\omega$（即ω_ω）共尾于ω。

事实上，只要对任一自然数n，令

$$f(n)=\aleph_n$$

则不难验证，f是从ω到$\aleph_\omega$的严格单调递增的序数函数，且满足共尾定义中的第三个条件，所以，cof$(\aleph_\omega,\omega)$。

一般地，共尾性具有下列一些性质：

性质1　任一序数α有cof(α,α)，即α与它本身共尾，共尾具有自反性。

性质2　cof$(\alpha,0)$当且仅当$\alpha=0$。

性质3　如果α共尾于β，且α是极限序数，则β必是极限序数。

性质4　如果α共尾于β，β共尾于γ，则α共尾于γ，即共尾具有传递性。

性质5　如果α是极限序数，则$\aleph_\alpha$共尾于α。（例3是当$\alpha=\omega$时的特殊情形）。

性质6　如果$\beta\leqslant\alpha$且β与α的基数相同（即$\overline{\overline{\beta}}=\overline{\overline{\alpha}}$），则存在着$\eta\leqslant\beta$，使得$\alpha$共尾于$\eta$。

性质7　如果α共尾于β，α共尾于γ，并且$\gamma\leqslant\beta$，则存在$\eta\leqslant\gamma$，使得β共尾于η。

性质8 如果α是任一极限序数且α共尾于β，则存在着一个严格单调递增的序数函数，f：$\beta\to\alpha$，使得

$$\alpha=\bigcup \mathrm{ran}(f)。$$

由于篇幅的限制和本书的性质，我们不去追求证明的细节，有兴趣的读者可以阅读有关集合论的专著。

显然，由上面列举的性质1和性质5可以看出，一个序数α能共尾于若干个序数，例如$\aleph_\omega$既共尾于$\aleph_\omega$，又共尾于ω。在这些与α共尾的序数中，必有一个最小的，它在集合论中占有重要的地位，这又引入了一个新的概念。

定义3 设α是任一序数，使得$\mathrm{cof}(\alpha,\beta)$成立（即$\alpha$共尾于$\beta$）的最小序数$\beta$，叫做$\alpha$的共尾性特征数，或者简称为$\alpha$的共尾数，并记做$\mathrm{cf}(\alpha)$。

由共尾数的定义，立即可以推出

$$\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\alpha \qquad (5\cdot2)$$

$$\mathrm{cf}(0)=0 \qquad (5\cdot3)$$

$$\mathrm{cf}(\alpha+1)=1 \qquad (5\cdot4)$$

$$\mathrm{cf}(\omega)=\omega \qquad (5\cdot5)$$

$$\mathrm{cof}(\alpha,\mathrm{cf}(\alpha)) \qquad (5\cdot6)$$

现在我们可以证明关于$\mathrm{cf}(\alpha)$的一些结论。

定理1 对于任一序数α，$\mathrm{cf}(\alpha)$是基数。

证明 当$\alpha=0$或者α是后继序数时，由(5·3)式和(5·4)式立即知道$\mathrm{cf}(\alpha)$是基数。

当α是极限序数时，由(5.6)式及性质3，得知$\mathrm{cf}(\alpha)$也是极限序数。令$\beta=\mathrm{cf}(\alpha)$。要想证明$\beta$是基数，根据第三章的基数定义，只需证明：如果$\gamma<\beta$，则$\overline{\overline{\gamma}}<\overline{\overline{\beta}}$。因为由$\gamma<\beta$保证有$\overline{\overline{\gamma}}\leqslant\overline{\overline{\beta}}$，于是，我们只需证明：如果$\overline{\overline{\gamma}}=\overline{\overline{\beta}}$，则$\gamma\geqslant\beta$。利用反证法来证明最后一个结论。

假设$\gamma<\beta$，则由$\overline{\overline{\gamma}}=\overline{\overline{\beta}}$和$\gamma<\beta$，根据性质6，必存在序数$\eta\leqslant\gamma$，使得$\mathrm{cof}(\beta,\eta)$成立。于是，$\alpha$共尾于$\beta$，$\beta$共尾于$\eta$，由共尾的传递性，$\alpha$共尾于$\eta$，且$\eta\leqslant\gamma<\beta$。这与$\beta$是$\alpha$的共尾数矛盾。□

定理2 如果α是一无穷基数，则$\mathrm{cf}(\alpha)$也是一无穷基数。

证明 因α是无穷基数，α必为极限序数。由于α共尾于$\mathrm{cf}(\alpha)$，由性质3，$\mathrm{cf}(\alpha)$为极限序数，故$\mathrm{cf}(\alpha)\geqslant\omega$。根据定理1，$\mathrm{cf}(\alpha)$是基数，所以$\mathrm{cf}(\alpha)$是无穷基数。□

定理3 如果α是极限序数，则等式

$$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)=\mathrm{cf}(\alpha) \tag{5·7}$$

成立。即$\aleph_\alpha$的共尾数等于α的共尾数。

证明 因为α是极限序数，由性质5，$\aleph_\alpha$共

尾于α，即$cof(\aleph_\alpha,\alpha)$成立。又因$cof(\alpha,cf(\alpha))$成立，根据传递性，有$cof(\aleph_\alpha,cf(\alpha))$成立，即$\aleph_\alpha$共尾于$cf(\alpha)$。由共尾数的定义得到不等式

$$cf(\aleph_\alpha)\leqslant cf(\alpha) \tag{5·8}$$

另一方面，因为$\aleph_\alpha$既共尾于$cf(\aleph_\alpha)$，又共尾于$cf(\alpha)$。以及（5·8）式成立。根据性质7，存在一序数$\eta\leqslant cf(\aleph_\alpha)$。使得$cf(\alpha)$共尾于$\eta$。于是，由$\alpha$共尾于$cf(\alpha)$，$cf(\alpha)$共尾于$\eta$，得到$\alpha$共尾于$\eta$。因此有

$$cf(\alpha)\leqslant\eta\leqslant cf(\aleph_\alpha) \tag{5·9}$$

由（5·8）式与（5·9）式立即推出等式（5·7）成立。 □

2. 蔻尼定理

蔻尼定理是建立了基数运算之间的一个不等式。在第三章中我们已经见到，无穷基数的运算有一些极其特殊的性质，不能将自然数的运算性质随便应用于无穷基数。我们再举例说明之。

假若给出两个基数簇$\{k_i|i\in I\}$，$\{\lambda_i|i\in I\}$。如果对于任意的$i\in I$，都有$k_i<\lambda_i$，则我们只能推出

$$\sum_{i\in I}k_i\leqslant\sum_{i\in I}\lambda_i\text{和}\prod_{i\in I}k_i\leqslant\prod_{i\in I}\lambda_i$$

而不能推出

$$\sum_{i\in I}k_i<\sum_{i\in I}\lambda_i\text{和}\prod_{i\in I}k_i<\prod_{i\in I}\lambda_i.$$

例如，取$I=\{1,2,3,\cdots\}$，令$k_i=i-1$，$\lambda_i=i$，则有$k_i<\lambda_i(i\in I)$。但是根据基数加法与乘法的定义容易得出

$$0+1+2+3+\cdots\cdots=\aleph_0,$$
$$1+2+3+4+\cdots\cdots=\aleph_0,$$

即$\sum_{i\in I}k_i=\sum_{i\in I}\lambda_i$。

然而对于基数的和及积之间，有着一个严格的不等式。即

蔻尼定理 设$\{k_i|i\in I\}$和$\{\lambda_i|i\in I\}$为两个基数簇，其中I为指标集合。如果对于任意的$i\in I$，都有

$$k_i<\lambda_i$$

则下列不等式成立：

$$\sum_{i\in I}k_i<\prod_{i\in I}\lambda_i \tag{5·10}$$

不等式（5·10）称为蔻尼不等式，或者蔻尼——蔡梅罗不等式。

证明 选取两个集合簇$\{S_i|i\in I\}$和$\{T_i|i\in$

$I\}$，使对任意的$i\in I$，S_i是T_i的真子集合，且

$$\overline{\overline{S_i}}=k_i,\ \overline{\overline{T_i}}=\lambda_i$$

另外设T_i是两两不交的，即当$i,j\in I$且$i\neq j$时，$T_i\cap T_j=\phi$。因而S_i也是两两不交的。令

$$S=\bigcup_{i\in I}S_i,\ T=\prod_{i\in I}T_i$$

则

$$\overline{\overline{S}}=\sum_{i\in I}k_i,\ \overline{\overline{T}}=\prod_{i\in I}\lambda_i$$

为了证明不等式（5·10），只需证明

（1）S与T的某一子集合等势，即有

$$\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{T}} \tag{5·11}$$

（2）S与T不等势，即有

$$\overline{\overline{S}}\neq\overline{\overline{T}} \tag{5·12}$$

首先证明不等式（5·11）。令$C_i=T_i-S_i$，由假设知$C_i\neq\phi$。在承认选择公理的前提下，$\prod_{i\in I}C_i\neq\phi$。令$f\in\prod_{i\in I}C_i$，由第三章给的定义知道$f$是函数。

$$f: I\to\bigcup_{i\in I}C_i,\ 对任一i\in I,\ f(i)\in C_i。$$

对于每个$a\in\bigcup_{i\in I}S_i$，置

$$f_a(i)=\begin{cases}f(i) & 当i\notin S_i时,\\ a & 当i\in S_i时。\end{cases}$$

显然，函数$f_a \in \prod_{i\in I} T_i$。现在考虑映射

$$g: S \to T$$
$$a \mapsto f_a$$

并证明g是单射。即证明a，$b\in S$且$a\neq b$时，$f_a\neq f_b$。事实上，当$a\in S_i$，$b\in S_j$且$i\neq j$时，$f_a(i)=a$，$f_b(i)=f(i)\in C_i=T_i-S_i$，即$f_b(i)\notin S_i$，所以$f_a\neq f_b$。当$a$和$b$属于同一个$S_i$时，$f_a(i)=a\neq b=f_b(i)$，从而证明了$g$是单射，不等式（5·11）成立。

其次证明不等式（5·12）。为此只需说明：凡是与S能构成一一对应的T的子集合，不可能与T重合即可。

每一个与S等势的集合P可以写成

$$P=\bigcup_{i\in I} P_i，其中\overline{\overline{P_i}}=k_i$$

如果P是T的子集合，则P中每一元素都是函数。令$h\in P$，（当然，$h\in T$）。于是，对于每一个$i\in I$，$h(i)\in T_i$。当h遍取P_i中的一切值时，元素$h(i)$构成了T_i的一个子集合$D_i=\{h(i)\mid h\in P_i\}$。于是有

$$\overline{\overline{D_i}}\leqslant\overline{\overline{P_i}}=k_i<\overline{\overline{T_i}}$$

即T_i-D_i不是空集合，由选择公理，得到

$$\prod_{i\in I}(T_i-D_i)\neq\phi$$

令 $\varphi\in\prod_{i\in I}(T_i-D_i)$。显然$\varphi(i)\notin D_i$。从而$\varphi\notin P_i$，因为对于$P_i$中的所有 h，都有$h(i)\in D_i$。由此推出函数φ不属于 P_i（$i\in I$），即 $\varphi\notin\bigcup_{i\in I}P_i=P$。

因为与S等势的T的任一子集合P，都能用上述方法找到一个φ，使$\varphi\in T$但$\varphi\notin P$，即 S 不可能与T等势。不等式（5·12）得证。

综上所述，蔻尼定理得证。 □

在蔻尼定理中，令$I=\omega$且对于任一$i\in I$，都取$k_i=1$，$\lambda_i=2$。定理的条件满足，于是得到

$$\sum_{i\in\omega}1<\prod_{i\in\omega}2$$

即

$$1+1+1+\cdots\cdots<2\cdot2\cdot2\cdots\cdots$$

根据基数运算的性质，上式就是

$$\aleph_0<2^{\aleph_0}$$

此即康托尔不等式$\overline{\overline{\omega}}<\overline{\overline{P(\omega)}}$。因此，康托尔定理是蔻尼定理的特殊情形，蔻尼定理是康托尔定理的推广。

3. 蔻尼定理的推论

蔻尼定理有几个重要的推论，它对连续统问题提供了一些肯定性的结论。

推论1 $2^{\aleph_0}$不可能是可数多个更小的基数的和。

证明 如果对于任一$i\in\omega$，都有$k_i<2^{\aleph_0}$，则根据蔻尼定理得到

$$\sum_{i\in\omega}k_i<\prod_{i\in\omega}2^{\aleph_0}$$

根据第三章的（3·16）、（3·17）和（3·19）式有

$$\prod_{i\in\omega}2^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}$$

所以

$$\sum_{i\in\omega}k_i<2^{\aleph_0}$$ □

推论2 $2^{\aleph_0}\neq\aleph_\omega$

证明 用反证法。假若$2^{\aleph_0}=\aleph_\omega$。因为对于任一$i\in\omega$，都有$\aleph_i<\aleph_\omega$，所以$\aleph_i<2^{\aleph_0}$，由蔻尼定理得到

$$\sum_{i\in\omega}\aleph_i<\prod_{i\in\omega}2^{\aleph_0}$$

于是

$$\aleph_\omega = \sum_{i\in\omega}\aleph_i < \prod_{i\in\omega} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

这与假设矛盾，所以

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$$ □

推论 3 对于任一序数 α，都有

$$\aleph_\alpha < \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})$$

证明 用反证法。假若 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \leqslant \aleph_\alpha$。因为 $\mathrm{cof}(2^{\aleph_\alpha}, \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}))$，即 $2^{\aleph_\alpha}$ 共尾于 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})$，根据共尾性的性质 8，存在一严格单调递增函数 f：$\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \to 2^{\aleph_\alpha}$，使得

$$2^{\aleph_\alpha} = \bigcup \mathrm{ran}(f) = \bigcup_{i\in \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})} f(i)$$

即

$$2^{\aleph_\alpha} = \overline{\overline{2^{\aleph_\alpha}}} = \overline{\overline{\bigcup_{i\in \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})} f(i)}}$$

令

$$g(i) = \begin{cases} f(i)，& \text{当 } i\in \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \text{ 时，} \\ \aleph_\alpha，& \text{当 } i\in \aleph_\alpha \text{ 但 } i\notin \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \text{ 时。} \end{cases}$$

则得到

$$2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\bigcup_{i\in\aleph_\alpha} g(i)}} \leqslant \sum_{i\in\aleph_\alpha} \overline{\overline{g(i)}} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$$

置 $k_i = \overline{\overline{g(i)}}$，显然 $k_i < 2^{\aleph_\alpha}$ 且 $\sum_{i\in\aleph_\alpha} k_i = 2^{\aleph_\alpha}$。

但是，根据寇尼定理有

$$\sum_{i\in\aleph_\alpha} k_i < \prod_{i\in\aleph_\alpha} 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$$

这与上面导出的等式矛盾，推论 3 得证。 □

推论 4 对于任一序数 α，如果 α 共尾于 ω，则

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha.$$

证明 因为 α 共尾于 ω， α 必是极限序数。于是由定理 3 有

$$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha).$$

因 α 是极限序数且共尾于 ω，则 ω 是 α 的共尾数，即$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，从而得到

$$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \omega$$

即$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$是可数的。另外由推论 3，$\mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$ 是不可数的。所以$\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) \neq \mathrm{cf}(2\aleph_\alpha)$，即

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha. \qquad \square$$

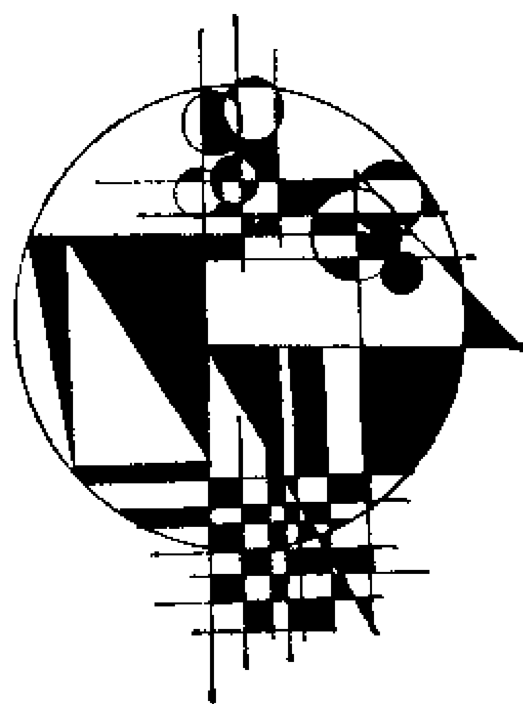
从推论1知道，连续统的基数$2^{\aleph_0}$不可能是比它小的可数多个基数的和，推论2说明$2^{\aleph_0}$不能等于$\aleph_\omega$。更进一步，推论4告诉我们只要 α 共尾于 ω，$2^{\aleph_0}$就不等于$\aleph_\alpha$.这几个推论都肯定了$2^{\aleph_0}$不能等于什么，是对$2^{\aleph_0}$的限制性结果。

在数学中，这类限制性结果虽然没有直接解决问题，但是它仍然很重要。例如：$\sqrt{2}$不是有理数，$\sqrt{-1}$不是实数，所有集合汇集在一起，

作为一个整体来看不是集合，等等也是限制性结果。这些限制性结果在数学中是有着极重要的意义。

几十年来，除了蔻尼对$2^{\aleph_0}$的限制外，至今还没有人提出新的限制来，更说明了它的重要性。在本书第十章我们将介绍科恩的成果，除了蔻尼的限制外，对于任意的序数α，只要它不与ω共尾，都存在着模型，使得在该模型中有$2^{\aleph_0}=\aleph_\alpha$。

六类型论



1900年前后，在集合论中出现了悖论。为了消除这些悖论，罗素提出了类型论。类型论的思想对于当代数学（尤其是集合论）的发展有巨大的影响。现在人们将集合区分层次的思想就起源于类型论，并且是类型论的发展。这种层次的概念，在证明连续统假设的相对协调性与相对独立性中都起了重要作用。因此，本章讨论类型论及其发展。

1. 康托尔-布拉里·弗蒂-罗素悖论

虽然1895年在集合论中就发现了悖论，但是，由于悖论是在序数、基数的技术领域里出现的，人们总以为可以很快地获得解决，没有引起

人们的重视。1901年罗素发现集合论中逻辑悖论，才引起了数学家们广泛的关注。

1）布拉里·弗蒂悖论，就是最大序数悖论。1895年康托尔已经发现了这个悖论，并于1896年写信告诉了希尔伯特。1897年，布拉里·弗蒂重新发现了它。

如第三章所述，序数有后继运算。也就是说，对于任一序数α，总有一序数β，使得$\alpha<\beta$，这只要取$\beta=\alpha+1$就够了。然而，所有序数的序列是良序的，它具有的序数应当是所有序数的最大者。这就构成了一个悖论。用现代的术语来说，对于任一序数α，它的后继$\alpha+1$也是一个序数。且$\alpha<\alpha+1$。令

$$O_n := \{\alpha | \alpha\text{是序数}\}$$

可以证明，O_n具有传递性，$\in$三岐性且是$\in$良基的。若O_n是一集合，则根据冯·诺依曼的序数定义，O_n是一个序数。一方面它应是最大的序数。另一方面O_n+1也是序数。于是有

$$O_n+1<O_n\text{且}O_n<O_n+1$$

出现了矛盾，即产生了悖论。然而，O_n不是一集合，矛盾也就被避开了，从而也就消除了这个悖论。

2）康托尔悖论，这是指康托尔1899年发现

的最大基数悖论。

康托尔认为把所有的集合汇总在一起，也能组成一个集合，记做M。据康托尔定理，有$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{P(M)}}$，其中$P(M)$为$M$的所有子集合所组成的幂集合。另一方面，由$M$的定义已知，$P(M)$的任一元素都已在$M$中，亦即对任一集合$x\in P(M)$，必有$x\in M$。所以，$P(M)\subseteq M$。因此，由势的定义有$\overline{\overline{P(M)}}\leqslant\overline{\overline{M}}$。这就获得了一个矛盾。

如何解决这些困难呢？康托尔也曾试图给出一种解决方案。在1899年7月28日与8月28日给戴德金的两封信中指出，问到所有的基数全体本身是否构成一个集合？因为如果是集合，就会有大于任何其它基数的基数。他想采用协调集合与不协调集合的办法，从否定方面来回答这个问题。康托尔的意思是说，协调集合S满足有更大基数的定理，即$\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(S)}}$，而不协调集合则不具有这种性质。

3）罗素悖论，这是罗素于1901年发现的，1902年他写信告诉了弗瑞格。蔡梅罗也曾独立地发现了这一悖论。设T为所有不是自己元素的集合所组成的一个整体，即

$$T:=\{x\mid x\notin x\}$$

试问：T属于T吗？

假设$T\in T$，T为它自身的元素，即T为T的元素。又因为T的元素具有性质：自己不属于自己，亦即$T\notin T$。因此，这与假设$T\in T$相矛盾。

假设$T\notin T$，即T不是自身的元素。由T的定义，T是所有不是自身的元素的集合组成的，既然$T\notin T$，T就是T的元素，故$T\in T$。这又与假设$T\notin T$矛盾。

根据上述论证，不管是$T\in T$还是$T\notin T$，都导致矛盾。同时，依据逻辑排中律，总有$T\in T$或$T\notin T$之一成立。这样，就得到一个悖论，称它为罗素悖论。

罗素在1918年把上述悖论给了一个通俗化的形式。某个村庄中有一位理发师，他制订了一条规定：他为而且只为该村中所有不给自己理发的人来理发。有人问他：你的头发由谁来理呢？他无言对答。因为，假若他的头发由他自己来理，违背了他的规定；假若他的头发由别人理，按照他的规定，就应该由他来理，这样，他自己又为自己理发了，再次违背了他的规定，不管怎样，都要引起矛盾，这就是理发师悖论。

由于罗素悖论的论证方式与康托尔定理的证明似乎有某种类似之处，同时又由于它的通俗

性，就使得它比其它两条悖论有更大的影响。

上述悖论都是在集合论中发现的逻辑悖论，这些逻辑悖论在数学界曾经引起过很大的震惊，甚至有人想以此来否定实无穷，否定集合论。如果否定了实无穷总体，否认集合的幂集合运算，当然也就否定了连续统假设这一著名问题。为了继续肯定这一问题的合理性，我们必须论证无穷集合与它的幂集合运算的合理性，这就是本章及下章的主要内容。

2．简单类型论

罗素认为产生悖论的根源在于错误地假定：一类对象可以含有此类的整体作为元素。由此就有一切类所构成的类还是一个类。罗素称这种类为“不合法的全体”。他认为承认“不合法的全体”就要引起“恶性循环的错误”，从而导致了悖论。可以看出，这种“不合法的全体”与康托尔的“不协调的集合”是一致的。罗素认为只要排除了“不合法的全体”就消除了悖论。为此，他提出了类型的概念，借以排除“不合法的全体”。类型论可分为简单类型论与分支类型论。

简单类型论把集合（类）、谓词区分为不同的类型。就集合来说，可以有下列类型：作为层次的基础是1型对象（亦即无需接受逻辑分析的原始对象，这是一些个体，比如通常人们可以把自然数作为原始对象，不过罗素对自然数还是作逻辑分析的）；1型对象可以作为元素组成2型对象，即1型对象组成的集合或类为2型对象；由2型对象组成的集合为3型对象；一般来说，对于任一正整数$n(n\geqslant 1)$，$n+1$型对象为由n型对象组成的集合，这样，$n+1$型对象的元素只能是n型对象。

令$x_1,y_1,z_1,\cdots$，等表示1型对象；$x_2,y_2,z_2,\cdots$，等表示2型对象；$x_3,y_3,z_3,\cdots$，等表示3型对象；$x_n,y_n,z_n,\cdots$，等表示n型对象；$x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1},\cdots$，等表示$n+1$型对象。简单类型论要求正整数可以做为型，只有正整数才能做为型，并且只有形式为

$$x_i\in x_{i+1}$$

的公式才是合法的初级公式。换句话说，对于形如$x_i\in x_j$的公式来说，当且仅当$j=i+1$时才是合法的。

在类型论中，没有不附加类型（或称型）的对象，也没有不附加型的变元。人们不能说所有

的对象如何如何，只能说某一型的所有对象如何如何．任一集合的型都比它的任一元素的型恰好大于1，如果不满足这样的要求，那么一个陈述语句（即命题）就不仅是错误的，而且是毫无意义的．

如此看来，按照简单类型论的要求，已经不允许有“$x \in x$”及“$x \notin x$”等说法了，这些说法不仅是错误的，而且是毫无意义的．因此，罗素悖论就被排除了．当然，排除了悖论，还要保留集合论的基本内容，特别是要保留无穷集合与集合的基本运算（包括幂集合运算）．为了说明这些内容，首先需要陈述一下简单类型论所使用的形式语言．

这里用的形式语言，除了上面按类型引进的符号外，还需要如下的一些逻辑符号（见第三章）．$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\forall$，$\exists$．另外，还需要形成合法的公式和语句的规则：

1）对于任意的正整数 i，$x_i \in x_{i+1}$称为初级公式，初级公式都是公式；

2）若A为一公式，则$\neg A$也是公式；

3）若A,B是公式，则（$A \wedge B$），（$A \vee B$），($A \rightarrow B$)和($A \leftrightarrow B$)都是公式．

4）若$A(x_i)$为一公式，变元x_i在$A(x_i)$中自

由出现，则$\forall x_i A(x_i)$，$\exists x_i A(x_i)$都是公式，

5）公式都是由上述1（—4）获得的。

在形成规则3中指出，当变元x_i在公式$A(x_i)$中自由出现时，$\forall x_i A(x_i)$和$\exists x_i A(x_i)$均是公式，在这两个新的公式中，x_i就不再是自由出现了，我们称它为约束出现。当一个公式中的所有变元都是约束出现时，就称这个公式为一语句或命题。

其次，我们来陈述简单类型论的公理，共有三组，即外延公理、概括公理和无穷公理。

外延公理　两个具有相同元素的集合是相等的。也就是说，一个集合的所有元素都给定时，这个集合就完全确定了。

用符号来表达这一公理，就是对于任意的正整数i，有

$$\forall x_{i+1}\forall y_{i+1}(\forall z_i(z_i\in x_{i+1}\leftrightarrow z_i \in y_{i+1})\rightarrow x_{i+1}=y_{i+1})$$

概括公理　对于任一正整数i，公式$A(x_i)$，变元x_i在其中自由出现，变元y_{i+1}在其中不自由出现，都有

$$\exists y_{i+1}\forall x_i(x_i\in y_{i+1}\leftrightarrow A(x_i)).$$

也就是说，有一集合y_{i+1}，它的元素恰好为满足$A(x_i)$的所有x_i，亦即

$$y_{i+1}=\{x_i \mid A(x_i)\}$$

由此，我们可以得到两个集合y_{i+1}与z_{i+1}的并集合$y_{i+1}\cup z_{i+1}$及交集合$y_{i+1}\cap z_{i+1}$，以及集合u_{i+1}的幂集合v_{i+2}，即

$$v_{i+2}=\{z_{i+1} \mid z_{i+1}\subseteq u_{i+1}\}$$

其中$z_{i+1}\subseteq u_{i+1}:=\forall x_i(x_i\in z_{i+1}\rightarrow x_i\in u_{i+1})$。即$z_{i+1}$是$u_{i+1}$的子集合。

无穷公理 就是说存在一个实无穷的总体，即存在着无穷集合。

关于无穷集合，罗素在他的《数理哲学导论》中曾说："然而如果我们要反对无穷集合，却也没有确实的逻辑根据。因此，我们现在研究这个假设，肯定世界上有无穷集合，在逻辑上并没有不合理之处。"罗素不仅承认可数无穷集合及它们的基数 $\aleph_0$，而且承认更大的基数。他说："并不是所有的无穷集合的项数都是 $\aleph_0$，例如实数的项数就大于 $\aleph_0$。事实上，它的项数是$2^{\aleph_0}$，即使 n 是无穷的，我们也不难证明2^n大于 n。证明了这一点，也予人的智慧以启发，…"。"…，事实上，我们将要看到，$2^{\aleph_0}$ 将是一个非常重要的数，…。在$\aleph_0$之后，$2^{\aleph_0}$ 是无穷基数中最重要的最有趣的。"罗素在论述从 ω 与 $\aleph_0$得到ω_1与$\aleph_1$之后接着说，用"完全类似的方法，我们可以从ω_1和

$\aleph_1$得到ω_1和$\aleph_2$，沿着这种途径我们可以无限制地进行下去，得到一些新的基数和新的序数，没有东西会限制我们。现在还不知道在$\aleph$的序列中有哪一个基数等于$2^{\aleph_0}$．我们甚至还不知道是否可以将它们和$2^{\aleph_0}$比较大小；或许和我们的知识相反，$2^{\aleph_0}$可能既不等于，也不大于或小于任何一个$\aleph$”。

十分清楚，罗素是肯定无穷集合、无穷序数和无穷基数的。

在简单类型论中描述无穷公理，必须注意层次关系。x_1, y_1是1型对象，无序对集合$\{x_1, y_1\}$为2型对象，有序对集合$\langle x_1, y_1\rangle$定义为

$$\langle x, y\rangle := \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$$

因此，$\langle x_1, y_1\rangle$是一个3型对象。一个关系是有序对的集合，从而它是一个4型对象。总之，关于1型对象的关系为一个4型对象，我们用W_4表示之，即令

$$W_4(x_1, y_1) := \langle x_1, y_1\rangle \in W_4$$

不难看出，下述语句保证存在着无穷多个个体：

$$\begin{aligned}\exists W_4(&\forall x_1 \neg W_4(x_1, x_1)\\ &\wedge \forall x_1 \exists y_1 W_4(x_1, y_1)\\ &\wedge \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 (W_4(x_1, y_1)\\ &\wedge W_4(y_1, z_1)) \rightarrow W_4(x_1, z_1))\end{aligned}$$

由上述形式语言、三组公理和初等逻辑就构成了简单类型论的形式系统T。这样一来，简单类型论就有两个方面：类型分层的直观模型和形式系统T。显然，如果我们相信这一直观模型在研究集合论时的指导作用，那末，我们就应当相信上述形式系统T也能起到这一指导作用。如果假定有无穷多个个体，并且从这些个体出发，按层次进行构造，最终将作出层次结构（见图6.1）。那末，我们不难相信，上述形式系统T

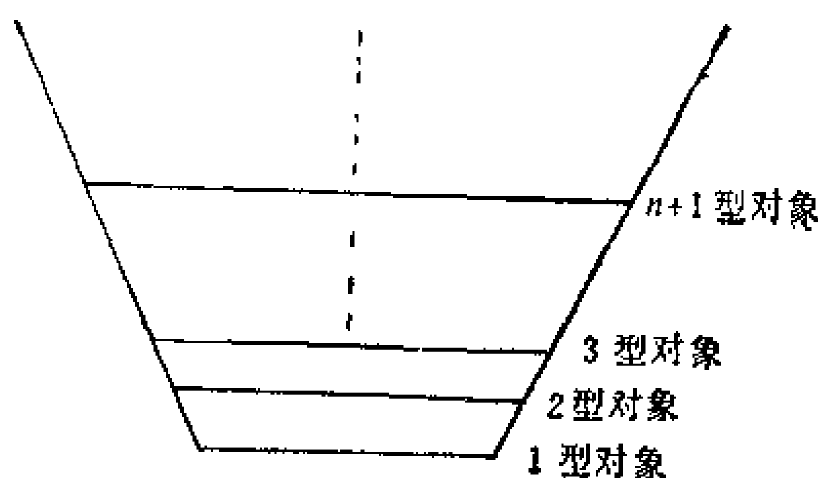


图6.1 类型分层的直观模型

对于这一结构（模型）来说是成立的。外延公理之所以为真在于每一集合都是由它的外延决定的；概括公理之所以为真在于：属于某一类型的对象的每一性质都决定了一个集合。也就是说，

一定存在一个集合y_{i+1}，它含有具有这一性质的每一对象x_i；无穷公理之所以为真，在于我们已经假定有无穷多个个体，并由此出发构造的直观模型。

如上所述，如果我们相信按类型分层的直观模型，就蕴涵着我们也可以相信形式系统T了。为什么我们能够相信上述直观模型呢？因为它自然地摆脱了“不合法的全体”，因而也就消除了康托尔——布拉里·弗蒂——罗素悖论。

3．理查德悖论

理查德悖论不同于前述的逻辑悖论，而是所谓语义悖论。简单类型论不能排除这种语义悖论。

理查德在1905年给出的悖论是以实数的定义形式出现的，类似于康托尔对实数集合不可数性的证明。狄松在1906年处理可有限定义性这个概念时，也得到了与理查德的实质上相同的悖论。为了确定起见，我们立论于一种确定的语言，可以是一种形式语言，也可以是一种自然语言。例如，可以采用具有确定的字母表、字典及文法的英语。字母表包括26个英文字母，标点符号和空

格（用来隔离两个单词）．为了通俗起见，我们用汉语来描述这一悖论．汉语的单词是有限的．用词组、语法组合起来的汉语语句也只有可数多个，不妨按照字典顺序来列举所有的语句：

$$S_0, S_1, \cdots, S_i, \cdots\cdots$$

有些语句能够定义一个一元数论函数，即函数 $f:\omega\to\omega$．它在 ω 上处处有定义，并且函数值也是自然数．在上述序列中，把所有能够定义一元数论函数的语句都拿出来，同样按照字典顺序进行枚举，得到序列

$$E_0, E_1, E_2, \cdots, E_m, \cdots\cdots \qquad (6\cdot1)$$

它们分别定义函数

$$f_{E_0}, f_{E_1}, f_{E_2}, \cdots, f_{E_m}\cdots \qquad (6\cdot2)$$

现在考虑下述语句："一个函数，当以任一给定的自然数为主变元时，它在任一自然数时的值定义为：在上述枚举（6·2）中，把对应于该自然数的函数在此自然数时的值再加上一"．

也就是说，当上述语句定义的函数为 f 时，对于任一自然数 i，f 在 i 处的值为 $f_i(i)+1$，即 $f(i)=f_i(i)+1$．显然，f 是用汉语语句定义的一元数论函数，但是，它与（6·2）中任何一个函数都不相同，而我们已假定（6·2）枚举出了所有能用汉语定义的一元数论函数，这就构成

了一个悖论，即理查德悖论。

贝利于1906年又给出了一个更通俗的形式。为了方便起见，我们仍然用汉语来陈述这一悖论："用少于十八个汉字不能定义的最小整数。"但这句话只有十七个汉字。因此，这句话用十七个汉字确定了一个整数，但依照定义，该整数不能用少于十八个汉字来确定的！这一悖论可以看作是理查德悖论的变形。

我们应该注意，理查德悖论与康托尔的对角线法非常类似，这就引起了人们对悖论的更大兴趣。由于简单类型论无法排除理查德悖论，因此罗素又引入了分支类型论。

4. 分支类型论

我们深入地考察理查德悖论时，不难发现，当我们把（6·2）中所枚举的函数看做是一个集合F时，那末，一方面，函数f是集合F的元素，另一方面，f的定义又依赖于F。这种定义过程，罗素称为非直谓的。如果一个对象x具有性质P，但x的定义又依赖于P，那末，相应的定义也是非直谓的。非直谓的定义是循环的，因为

被定义的对象已渗透到它的定义里面去了。

我们重新考察康托尔、布拉里·弗蒂和罗素悖论，不难看出，它们都用到了非直谓的定义。例如，罗素悖论是说，把所有的集合组成的M区分为两类，第一类是由那些以自身作为自身的元素的集合所组成，第二类（即前述的T）是由那些不以自身作为元素的集合所组成。然后，把由M分成两类而定义的T放回到M中，而问它在M的哪一类中，这当然是非直谓的。虽然有非直谓定义，但是采用简单类型论，却能排除了悖论。理查德悖论中也用到了非直谓定义，因为在论证过程中，把汉语中能描述任一数论函数的语句已概括为一个总体，但在定义函数f时又用到了这一总体。然而，简单类型论不能排除这一悖论，这说明简单类型论不能完全摆脱非直谓定义。事实也正是如此，设z_3为一3型对象，按照它的概括公理，存在着一个2型对象x_2，满足

$$\forall x_1(x_1 \in x_2 \longleftrightarrow \exists y_2(x_1 \in y_2 \wedge y_2 \in z_3))$$

显然，x_2是一个2型对象，然而却要依赖于2型中变动的辅助变元y_2来定义。这就说明x_2是依赖于一个含有x_2在内的整体来定义的，这正是一个非直谓的集合。1906年，庞加莱指出，非直谓定义

含有恶性循环，因而引起了悖论．这是一个重要的论断，恶性循环引起悖论是他最先指出的．为了排除恶性循环和非直谓性，罗素引进了分支类型论．

分支类型论比较复杂．粗略地说，分支类型论是在简单类型论的基础上，对于同一类型的集合，类与性质（谓词），再按其逻辑复杂性区分为不同的级．例如，对2型对象来说，不涉及任何2型总体的性质为0级性质，而用到某级性质的总体所定义的性质便为更高一级的性质．罗素想借此来排除非直谓性质．他提出了恶性循环原则，实际上是避免恶性循环原则，这一原则是说：没有一个总体能够包含下列两种元素：它只能由该总体而定义，它或者包括(或者预先假定)该总体．这样看来，人们已经对于悖论有了一个充分的理解与解决方案了．然而，排除非直谓性质又带来了新的困难，本来人们的目的在于既要消除悖论，又要保存数学的基本内容，但是在数学分析中，尤其在其基本概念中包含有非直谓的定义．

例如，对于一个实数集合 S，定义实数 u 为 S 的上确界，按照戴德金的实数理论，任一实数都是某一有理数集合，不难证明，当 u 满足下式

$$\forall x(x\in u\text{当且仅当}\exists y(y\in S\text{且}x\in y)) \tag{6·3}$$

时，u就是S的上确界。显然，上确界这一概念是非直谓的。如果排除了非直谓性质，就排除了分析学中上确界、下确界等一系列基本概念，从而也排除了实数的上确界定理：任一非空的实数集合，如果它有上界，则必有上确界。这样一来，分支类型论当然就不能作为分析学和表达数学命题的工具了，这是它的一个严重缺陷。为了补救这一缺陷，罗素不得已又增添了一条还原公理：

"一切非直谓性质都有一等值的直谓性质"。有了这一条公理，人们就可以用直谓性质来代替非直谓性质。这样，实质上等于取消了分支类型论所要求的级的区别。

1926年，英国逻辑学家拉姆西把悖论分为逻辑的与语义的，前者可以用简单类型论来排除，理查德悖论属于后者，而这种悖论在逻辑系统的对象语言中不会出现，从而分支类型所引起的困难得到了解决。至于语义悖论，塔斯基在罗素与哥德尔所取得的成果的基础上，建立了"语言层次"理论，不仅成功地解决了这种悖论，而且开辟了逻辑语义学的研究方向。

5. 类型论的影响

简单类型论不仅已被逻辑学家所公认，而且在数学中也产生了很大的影响。鲁滨逊在创立非标准分析时，所用的型结构与型语言正是简单类型的推广，集合论模型中的层次概念也是简单类型论的推广，并且是在两个方向上作了推广。一是把有穷层次推广到任意序数的层次，二是把$x\in y$只限于x的层次恰好比y的层次低1，推广到只要x的层次小于y的层次就是合理的。这两项推广，使得既保持了理论的严谨性，又在应用上具有很大的灵活性。

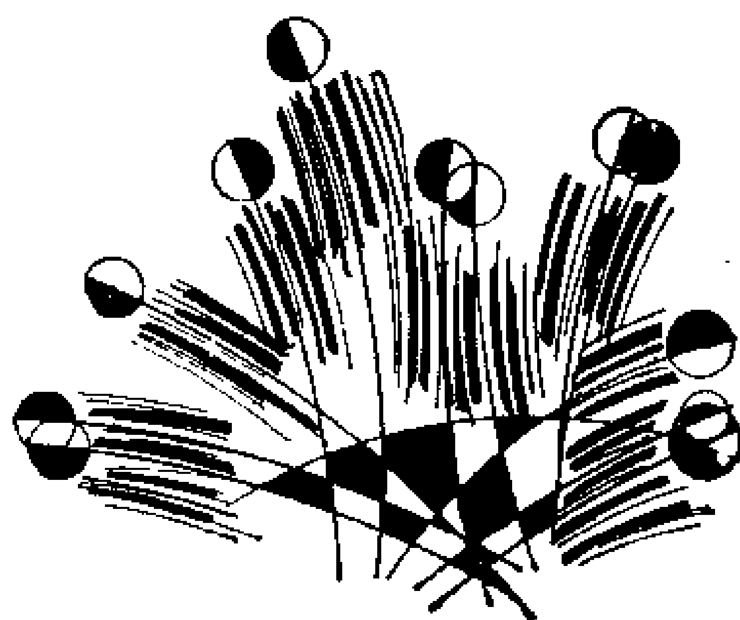
分支类型论虽然不能普遍适用了，然而对于某些领域和某些方法却获得了极大的应用。在证明连续统假设的相对协调性和独立性时，分支类型论的思想也获得了发展。

6. 历史注记

罗素　现代著名的英国数理逻辑学家和哲学

家，他是资产阶级哲学分析学派的创始人之一。1918年因反对第一次世界大战而被监禁了六个月。1961年89岁高龄时又因参加群众性静坐运动而被拘留七天。罗素认为数学可以从逻辑推导出来。在他和怀德海合著《数学原理》这三大卷本的名著中说：“本书有两个目的，第一是要说明一切数学都可以从符号逻辑导出，第二是尽量找出符号逻辑本身的所有原理。”这两点扼要地表明他对数学基础的观点。

七 希尔伯特方案



1. 历史背景

19世纪末，由于希尔伯特等著名数学家的倡导，集合论在数学中得到了广泛的应用，实数理论已还原到自然数和无穷集合了。自然数是人们公认的，这样，实数基础也就还原到集合论了。从而当时的数学各分支都以集合论作基础了，并且人们一度相信集合论是最可靠的。然而集合论中出现了悖论，这自然就引起了数学家的震惊，引起了数学基础研究的第三次危机。罗素企图把数学归约为逻辑，当然后来也没有达到预期的目的。以布劳维尔为代表的直觉主义者认为，逻辑原则是不可信任的。他们认为，古典逻辑不是绝对有效的，而是与它们所施于的对象有关

系。被称为半直觉主义者的韦尔曾说："根据我的见解，又回顾一下历史，可以看出古典逻辑是从有穷集合及其子集合的数学中抽象出来的，…。但是后来人们忘记了这个有穷的来源了，误把逻辑当作高于一切数学的东西，最后又毫无根据地用到无穷集合的数学上去。"最明显的对有穷集合适用，而对无穷集合不适用的原则就是整体大于它的真正部分。

直觉主义者甚至认为，对于有穷集合有效的排中律，也不适用于无穷集合。排中律的一般形式是：对于每个命题A来说，A真或者非A真，不能两者都真，也不能两者都不真，为了说明直觉主义者的观点，我们假设A是这样一个命题：

集合S中有一个元素具有性质P

当S为有穷集合时，我们可以依次检验S中的元素，当发现S中有一个元素具有性质P，则命题A真。当检验完集合S中所有元素，都不具有性质P时，则命题A不真。只要S是有穷集合，不论它的元素有多少，就是有几亿个，几兆个，上述办法在原则上是可行的。直觉主义者认为，对于无穷集合S来说，情况有了根本的改变，要对整个S作通盘的检验，在原则上已经不可能了。因此，他们认为，对于有穷集合来说，

逻辑排中律是一个有效原则，对无穷集合来说，就不是有效的了。

直觉主义者要求在数学中只承认有穷对象，否认无穷对象，不承认无穷集合的存在性，韦尔曾说："毫无疑问，布劳维尔完全清楚地知道，没有任何证明再支持下列信仰：把所有自然数的全体当作是具有存在的特性的，…。自然数列既已超出由一数而跳到下一数这种步骤所已达到的任何阶段，它便有进到无穷的许多可能；但它永远留在创造的形态中，绝不是一个自身存在的封闭的领域。我们盲目地把前者变为后者，这是我们困难的根源，悖论的根源也在这里——这个根源比之罗素的恶性循环原则所指出的具有更根本的性质。布劳维尔打开了我们的眼界并使我们看到了，由于相信了超出了一切人类的真实可行的'绝对'之故，以致古典数学已经远远地不再是有真实意义的陈述句，也不再是建基于明证之上的真理了。"

直觉主义者认为数学对象必须是可构造的，数学的存在等于可构造，所谓可构造就是，或者能具体的给出，或者能给出一个可以得到某一对象的计算方法。在古典数学中经常使用的非构造性的间接的存在性证明方法，直觉主义是不能接

受的．例如数论中的最小原则：

如果有一个自然数 n 具有性质 P，则必有一最小数具有性质 P，这一原则的证明很简单．从1开始，按照大小顺序，一个一个检验下去一直到 n．在这一过程中，最早遇到的那个具有性质 P 的自然数 k 就是那个最小数．这个数必然存在，因为如果 n 前面的自然数都没有性质 P 的话，n 就是那个最小的数，但直觉主义者不能接受这种证明，构造证明必须具有两个条件．第一，k 必须能真正给出，其存在不应通过引用排中律．第二，P 必须是一个可构造的性质，即对应给定的任一 k，$1\leqslant k\leqslant n$．$P(k)$ 的真或假是可判定的，如果这两条不满足，最小数原则就不能接受．

直觉主义者否认实无穷，不允许在含有实无穷对象的数学理论中使用排中律，又坚持构造主义思想，因此，对以实无穷为对象的每个数学分支都要经过重新审核．数学分析和集合论首当其冲，经过他们的审核，虽然这两门学科的不少内容用他们的方法重新得到证实．但是，很多重要的内容被抛弃了．

1922年，在汉堡的一次会议上，希尔伯特愤怒的指出：“功绩卓著的第一流数学家韦尔和布劳维尔，通过错误的方法去寻求问题的解答”．

“韦尔和布劳维尔的所作所为，归根结底是在步柯朗尼克的后尘！他们将一切他们感到麻烦的东西扫地出门，以此来挽救数学……他们对这门科学大砍大杀。如果接受他们所建议的这种改革，我们就要冒险，就会失去大部分最宝贵的财富！”

他列举了一些例子：

无理数的一般概念；

函数，甚至数论函数；

康托尔的超穷数；

在无穷多个正整数中存在一个最小数的定理；

逻辑排中律。

布劳维尔与希尔伯特为此展开了非常激烈的争论，希尔伯特说布劳维尔使我们失去了许多宝贵的财富，而布劳维尔认为他抛弃的是不正确的东西，1923年他说：“不正确的理论即使还没有遇到矛盾，但仍然是不正确的，正如一个罪恶的行为即使还未被法院所发觉，但仍然是罪恶的。”希尔伯特于1928年反驳说：“要想从数学家手中拿走排中律，这就类似于想夺走天文学家的望远镜，或者不允许拳击家使用拳头一样。”

为了捍卫古典数学的基本内容并且答复布劳维尔和韦尔等人的指责，希尔伯特提出了关于解

决数学基础问题的方案，现在人们称它为希尔伯特方案。

2．实无穷与理想元素

如前所述，在对待数学基础问题上，希尔伯特既反对逻辑主义，又反对直觉主义。

在1904年第三次国际数学会上，希尔伯特就指出："算术常常被认为是逻辑的一部分，当我们解决建立算术基础这个问题时，往往会把传统的逻辑基本概念当作前提，但是，如果我们深入考察，那就会承认：在我们叙述传统的逻辑定理时，已经用到某些基本的算术概念，于是，我们发现自己陷入了某种循环，这就说明，如果我们想避免悖论，那就必须在某种程度上同时对逻辑定律和算术定理进行研究。"这就是说，希尔伯特认为数学的基础不仅是逻辑，应该同时建立逻辑和算术系统。

希尔伯特始终不同意直觉主义的思想，柯朗尼克的思想是：整数是算术的基础，因而借有限多个整数而进行的构造过程是判别数学存在性的唯一可能的标准。布劳维尔和韦尔步柯朗尼克后

尘，抛弃了最宝贵的财富，使希尔伯特感到不安和坚决反对。在希尔伯特看来，悖论的根源不在于实无穷，而在于对实无穷的错误认识。

希尔伯特承认，古典数学中凡涉及无穷的那些命题都缺乏直觉的明显性。但他不愿象布劳维尔那样抛弃这一部分古典数学的内容，他认为直觉经验和物理世界里没有无限小，无限大和无穷集合。无穷"不是给与的"，它实际上是"通过思维过程而被嵌入或者外推的。"但是，数学理论的各个分支都包含有无穷集合，数学里的自然数集合，几何里一条线段上的点的集合。数学分析在一定意义上是一个"无穷的交响乐"。由此可见，在人类思维过程中，无穷是一个不可缺少的概念，应当有其合法的地位。

由于无穷不能在经验中直接验证，希尔伯特称它为理想元素，并在古典数学中应区别"真实"命题与"理想"命题，其要点是：真实命题是具有直觉意义的命题；理想命题是没有直觉意义的命题。凡是把无穷作为实无穷的命题都是理想命题。在古典数学中除了真实命题外，还加上理想命题，是为了在关于无穷集合的推证时，仍能使用古典逻辑的简单规则。

把"理想元素"加入到一个系统中去，是现

代数学中常用的有效方法，在数学理论中起着很重要的作用．例如，在欧氏平面几何中，两条不同的直线有唯一确定的交点，只要这两条直线不平行．两条平行直线没有交点．为了排除这个例外情形，彭色列在他的射影几何中，在每一条直线上引入一个无穷远点（理想元素！），使得凡平行直线都有共同的无穷远点，不平行的直线有不同的无穷远点．这些无穷远点的全体便组成一条无穷远直线．这条无穷远直线可以想象为射影平面上一直线绕有穷远点旋转时，它的无穷远点运动的轨迹．引入无穷远点这个理想元素以后，点与线之间的结合关系就简化了，两个不同的点决定唯一的直线，两条不同直线（不再要求互不平行）决定唯一的点．又如，在代数里引入理想元素虚数，可以简化关于代数方程式的根的定理，并使理论更为完整，对于一个 n 次代数方程有没有根，有多少根的根的问题由代数基本定理：每个次数大于等于 1 的复系数多项式在复数域中有一根，由此又可得出：任何一个次数大于等于 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积．给出了确切的回答．

希尔伯特认为，使用理想元素要有一个基本的要求，这就是不能产生矛盾，“因为，只有不把

矛盾带入那原有的较狭窄的领域里，通过增加理想元素进行扩张才是允许的”。然而，仅仅不导致矛盾还不足以说明引入某一理想元素是合理的，因为理想元素的引入总是由于数学理论的需要，它既可以简化理论系统，又可以使结构更为完整。集合论里实无穷的引入是为了给数学分析奠定理论基础。希尔伯特强调说：“如果除了证明其协调性以外，还要更进一步说明某一措施为合理的话，那只能看有无相应的成果伴随而来，显然，成果是必要的，它在这里是最高的裁判所，任何人都得服从”。因此，理想元素决不是任意引入的，必须要满足对它的要求。关于无穷的存在问题，希尔伯特认为，只要一个理想元素不导致逻辑矛盾，它就是数学上的存在，早在1900年他说：“如果一个概念具有矛盾的属性，那末我就说：这个概念在数学上是不存在的……，但是，如果可以证明，一个概念的属性不会经过有穷步骤的逻辑推理而导出矛盾，那末我说，这一概念（例如，满足一定条件的一个数或一个函数）的数学存在性就被证明了”。

3. 从相对协调性到元数学

关于研究公理系统的协调性问题，在希尔伯特方案提出以前，对公理系统协调性证明所使用的方法，尤其是希尔伯特早期的公理思考中，都是用给出“模型”的方法。所谓某一公理系统的模型，是指从其它理论中挑选出满足该公理系统的对象系统。也就是说，该公理系统中每一个对象或原始概念，在另一理论中都有一个相应的对象或概念，并且使得该公理系统中的公理变成（或相应于）另一理论中的定理。如果另一理论是协调的，那末，该公理系统也是协调的，因为，如果由该公理系统中的公理可以推出矛盾，则在另一理论中对“模型”中的对象作相应的推理，就必然会由相应的定理推出矛盾来了，这与另一理论协调性的假设相冲突。

利用模型方法作出的协调性的证明只是相对的，只有当被抽出模型的那个理论是协调时，模型所表示的理论才是协调的。

为了绝对地证明古典数论，数学分析和公理集合论的协调性，模型方法是不可能的，因此，

要想绝对地证明这些理论的协调性，就必须采用其它方法。

希尔伯特建议采用一种直接方法，这种方法是由协调性的意义直接得出来的。协调性的意义在于：在一个理论中，不能由公理导出矛盾命题，即推出命题A及其否定式非A，因此，要直接证明某一数学理论的协调性，我们必须证明一些关于该理论本身的命题，特别是该理论中各条定理的一切可能的证明。于是，该数学理论本身（或称"对象数学"）便成了另一种数学研究的对象。这里所谓"另一种数学"，希尔伯特称为"元数学"。元数学是研究对象数学的基本工具。因此，它应当是可靠的，它必须只能使用有穷逻辑和不含有实无穷的初等数论。

希尔伯特方案概括地说就是：将古典数学表示为形式公理理论，并用有穷方法证明这一理论的协调性。

4. 希尔伯特方案的基本内容

希尔伯特方案是将数学理论（包括含有实无穷的数学理论）进行形式化的处理，建立相应的

形式公理系统(亦称形式数学系统或形式系统),用有穷方法研究形式公理系统的形式定理和形式证明,并证明公理系统本身的协调性与完全性。具体地说,是指:

1)把古典数学的每一分支(如初等数论,集合论或数学分析等)进行严格的形式化的处理,加上逻辑演算,并将二者综合起来建立相应应的形式系统,使得该分支中每一个数学命题都可以在相应的形式系统中表示出来,并且给出数学定理的形式证明。

2)建立有穷逻辑与不含有实无穷对象的初等数论,作为研究形式系统的工具,这样建立起来的逻辑和数论称为"元数学"。

3)用元数学研究形式数学系统的逻辑性质,特别是研究形式系统里的证明。希尔伯特的目的是要论证每个形式数学系统都具有协调性,即形式数学系统不包含矛盾。一旦解决了协调性问题,那么这一形式数学系统所描述的直观数学理论就不会产生矛盾了。

4)完全性问题,就是要证明每一形式系统是完全的。所谓完全的是指:该系统中任一形式命题在该系统内,或者是可证的(当该形式命题表述的是相应数学分支中的真命题时),或者是

可驳的，即该命题的否定式是可证的（当该形式命题表达的是相应数学分支中的假命题时）。

5）判定性问题，希尔伯特认为，每一形式系统存在一个算法，使得对于形式系统内的任一形式命题，按照这一算法，都可以在有穷步骤内，机械地判定它是不是一个形式定理。

5．形式系统

如上所述，形式系统的概念具有特别的重要性，因此，这里着重阐述一下这一重要概念。一种数学理论只有建立起相应的公理系统以后，才能被数学家所承认，例如概率论，在柯尔莫哥洛夫建立概率的公理体系以前，很多数学家根本就不承认它是数学。

形式公理学的对象及其性质关系是通过一组公理来刻画的，这就要求有一个刻画公理的形式语言或称符号语言。这种形式语言比自然语言例如汉语或英语要更简洁，更规范和更严格，自然语言按其结构来说太复杂了，太不规则了，其用法也太含混了。

这种新的语言具有数学中符号体系的一般特

征。例如在代数学中对方程式所作的处理，如果不使用符号，完全用自然语言来叙述，那将是过于繁杂的。当发现了简单的符号记法，使得这些符号可以依照形式规则来处理，这是现代数学能够前进的强有力的办法之一。但是，在通常的数学理论中，只是部分符号化及部分形式化，在叙述中总有一部分甚至大部分是用自然语言（通过文字）来表示的，并且在推理中有一部分是根据字的意思而不是根据形成规则。

希尔伯特的贡献是：第一，强调一种理论的严格形式化，包括把意义完全弃掉，其结果便是一形式系统；第二，把整个形式体系当作数学研究对象，以此区分出对象数学与元数学。

一个形式系统中，首先要有一系列关于符号的规定：

规定几种初始符号（或称字母表）；

规定何种类型的符号串（或称符号序列）是合式公式（或简称公式）；

规定一些作为出发点的公式（或称为公理）；

规定从某些公式到某一公式的转换规则（也称为形变规则）。

以上这些都叫做语法规则，此外，符号要

有解释，即语义理论。

粗略地讲，形式符号表相当于通常语言的字母表，但是在解释之下，有许多符号是对应于一个字或一个句子，而不是对应于一个单独的字母的。符号串是指有穷个符号按照一定顺序排列起来的符号序列，并且在序列中不同的位置上可以出现同一个符号。形式符号串是否为合式公式，要由形成规则来确定，这就相当于一些字排成一串，是不是构成一个句子是由语法规则确定的。

关于形式系统还有一个重要的要求，那就是对于四个基本问题：

1）一个符号是不是该系统的初始符号；

2）一个符号串是不是合式公式；

3）一个合式公式是不是公理；

4）从一组公式是否可以据某一转换规则转换为某一公式。都要在有穷步骤内根据已给定的机械方法作出回答。

由于上述特征，因而可以应用有穷方法或有穷逻辑来研究形式系统。

弗瑞格和希尔伯特是形式系统与形式化方法研究的开创者，哥德尔，车赤和克林尼对于揭示形式化理论的本质性质作出了重要贡献。

形式化是指把各门直观数学分别按形式系统

的要求，进行抽象加工建立相应的形式公理系统（如形式数论系统，集合论公理系统）的过程，在形式系统中允许含有实无穷对象，并且排中律是有效的，把数学分支进行形式化处理，包括形式语言，数学公理、逻辑公理与推演规则，运用数学方法建立形式证明与形式定理的概念。

20世纪50年代，人们推广了形式系统的概念，把具有一定规律性的研究领域（不仅限于数学）抽象为形式系统，通过形式的研究所获得的结果，再还原到直观的领域，这样一来，形式化就成了一种重要的研究方法。

6．有穷方法

有穷方法是希氏方案的一个中心概念，这里对它作出具体的说明，它是由柯朗尼克首先提出，并由布劳维尔所发展的一种方法，希尔伯特坚持形式系统的有穷特征，因此在形式系统的研究中应当采用有穷方法。

希尔伯特虽然采用了直觉主义提倡的有穷方法，但二者所持的观点是不同的，分歧仍在于对于实无穷的态度。古典数学的协调性问题是由

实无穷引起的。古典逻辑演算也假定了实无穷，因此，在论证古典数学没有矛盾时，不能应用以实无穷为前提的思想方法或工具，只能采取在直观上明显可靠的，与古典逻辑和一般数论不同的方法。不然的话，就会出现循环论证的错误。这就是有穷观点。与此相应的方法称为有穷方法。

形式系统中的有穷方法要求，形式系统的元逻辑应当是有穷逻辑，所谓元逻辑是指关于形式系统的描述与研究中所使用的逻辑。

希尔伯特坚持的有穷方法有几个基本要求：

1）每一步骤只考虑确定的有穷数量的对象，承认潜无穷过程，而不处理实无穷（即由无穷多个对象组成的完成了的整体）。

2）所涉及的定义，讨论或者判断都必须满足：其对象可以完全给出并且它的过程可以彻底进行完毕的要求；

3）全称命题表达一规律，此规律对于每一个具体的对象都必须可以得到验证。存在命题必须能够直接给出某一特定的对象，或者在原则上给出一种算法，经过有穷步骤就可以得到那个对象；

4）排中律对于有穷对象或有一种机械方法

在有穷步骤里能判断其结果的对象才有效。

7. 希氏方案的影响

希尔伯特与其合作者按照希氏方案，对数论和分析的协调性进行研究，并取得了一些成果。例如1927年左右，阿克曼和冯·诺依曼都得到数论协调性的部分成果。希尔伯特当时并不了解证明古典数学协调性的本质困难，直至1930年他还认为，只要作出足够的努力，并且对已有结果作较为直接的扩充，就能达到他所希望的目的。

正当希尔伯特学派满怀信心地致力于希氏方案的实施时，哥德尔给了希氏方案一个沉重的打击。这就是1931年，哥德尔在一篇著名的论文中发表的关于形式数论系统的不完全性定理：如果形式数论系统是足够丰富的（即能够表达算术加法与乘法）和协调的，那么这一系统是不完全的，并且它的协调性在系统内是不可证明的。希尔伯特得知哥德尔的结果时，十分震惊，他随即决定把证明协调性的有穷方法加以扩充，允许把超穷归纳法作为证明工具。1936年，甘岑用超穷归纳法证明了形式数论系统的协调性，当然，这已

经不是严格意义下的有穷方法了。

尽管哥德尔的工作对希尔伯特方案是一个致命的打击，但是希尔伯特为把古典数学从矛盾中解脱出来并使人们获得自由的观念，无疑击败了他的对手们所主张的束缚人们手脚的思想，也是希尔伯特首先把协调性问题提得如此简单明白，这在数学思想史上起的重要作用是无法估量的。

哥德尔认为："虽然有了我的否定结果"，希尔伯特方案"仍不失其重要性，并继续引起人们的高度兴趣……。已证明的只是：不可能达到希尔伯特心目中特定的认识论目标，这一目标是要去证明古典数学公理的协调性就象初等算术那样具体和一目了然。"

哥德尔还说："从纯粹的数学观点来考虑问题，那种以适当选取的、较强的元数学假设（如甘岑和其他人所给出的）为基础的协调性证明，恰好是人们所感兴趣的，人们通过这些证明能获得非常重要见解，从而看清数学的证明的结构。当然，基于形式化的研究方法，能否对于古典数学的协调性进行构造主义的证明，以及如果可能的话，又可以解决到什么程度这样一个问题并没有解决。"

"至于说到我的否定结果，我觉得它的重要

性在于以下的事实：在很多情况下，它们能够判断或猜测希尔伯特方案的某个特殊部分，能否在给定的元数学假设下彻底进行”。

希尔伯特方案虽然不能实现，但是，他提倡的有穷逻辑和元数学方法，随着数理逻辑和计算机科学的发展而得到迅速发展，并且有着广泛的应用。目前，计算机软件，智能工程等方面的元逻辑、元语言等都是希氏方案中逻辑思想的深化与推广。正是在这个意义上，我们说，希氏方案不仅促进了逻辑学的新纪元的诞生（这个新纪元标志是哥德尔的结果与方法），而且促进了逻辑与数学的广泛应用，形成了一系列新的研究领域。

8. 历史注记

1）希尔伯特是德国著名的数学家。他精力充沛、富于独创精神；他多才多艺，兴趣广泛，是许多数学领域的开拓者。特别是在代数数、代数不变式、几何基础和数学基础方面都作出了巨大的贡献。一般认为他是形式主义的奠基人，但他本人并不自命为形式主义者。1900年他

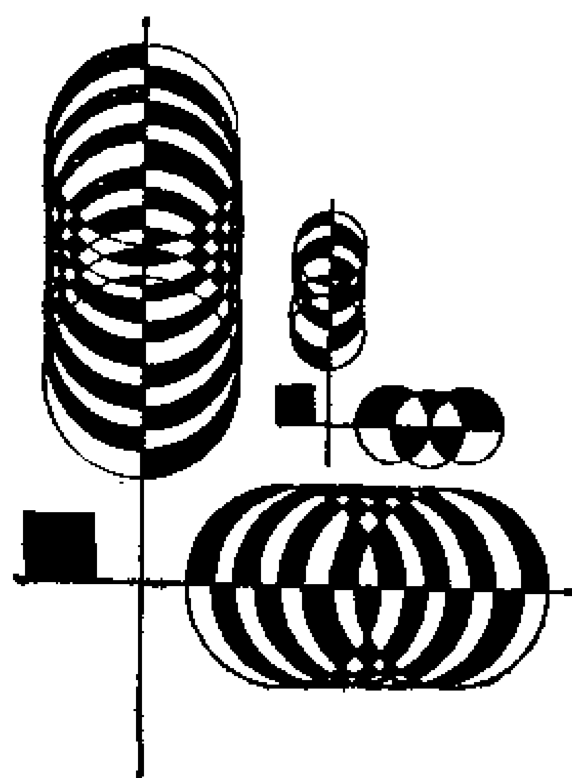
把算术公理的协调性列为著名的二十三个问题中的第二个，1904年以后主要精力放在积分方程及物理学公理化方面。从1917年起，为了从直觉主义者手中挽救古典数学，他用了二十多年的时间从事于数学基础的研究。

2）布劳维尔是荷兰人，现代直觉主义的奠基人。在1907年的博士论文中阐述了他对数学基础问题的观点。他认为数学思维是头脑中的自由创造，与我们经验的世界无关，有点象是自由设计，只受到应以基本数学直观为基础的限制。决定概念的正确性是直觉，而不是经验和逻辑。作为一个数学家，他在拓扑学、李群、几何方面都有出色的工作。

3）韦尔本是希尔伯特的学生。1920年在苏黎士数学会上宣布："我现在放弃我自己的尝试而赞同布劳维尔的观点。"从而又利用自己的文学天才，使布劳维尔的思想得到更广泛的传播。这更使希尔伯特感到不安，所以积极考虑保卫古典数学的问题。

4）彭色列是法国的一位工程师兼将军。他最早探索几何图形在投影与截影下保持不变的性质，这是他及其后继者研究的主题，即现代射影几何的内容。

八 集合论的ZF公理系统



为了避免集合论中出现的悖论，也为了解决集合论自身中的问题，20世纪初开始了集合论公理学的研究方向。

数学中的公理方法是古希腊欧几里得首创的，他在整理、总结古代数学的丰富知识时，运用了亚里士多德的逻辑方法，选择少数基本概念的命题，作为定义、公理与公设，使它们成为几何学的出发点和逻辑依据，然后推出一些命题，从而获得一系列的几何定理。欧氏几何不仅使几何知识系统化，而且也消除了几何学中的逻辑隐患。

自欧几里得创立第一个数学公理系统以后，公理方法一直是数学的一种重要方法。当一门数学（甚至其它学科）发展到相当成熟的阶段时，人们就使用公理方法进行综合整理，从而获得更

加系统的知识，同时也可以发现并消除某些逻辑隐患。

公理化的实质就是：从一些不加定义的术语出发（这些术语的性质由公理规定），运用一定的推理方法，推导出这些公理的推论。当然，对于每个公理系统必须确立协调性、完全性和独立性等根本问题。

值得注意的是：现代的公理系统和古典的公理系统有很大的差别。现代公理系统的一个重要特征是它的严格性。严格性要求：在进行推理时所遵循的推理规则，必须是已经给出的并且是非常明确的，凡是没有给出的推理规则，不论它多么明显，都绝对不允许使用；除了已给的公理和已经证明的定理外，在证明过程中不准许附加其它前提，也不能有其它隐含的前提。欧氏几何作为一个公理系统，不能满足上述严格性要求。在现代公理学里，公理以及进行推演所遵循的规则都是明确给出的，而且是用严谨的语言陈述出来的。

现代公理学的另一个特征是选取公理时所依据的标准。古典公理系统中的公理的真实性是极其明显而直接的，而在现代公理系统中，作为公理的命题必须能够充分地确定所处理的对象的特征。因此，一个命题可能由于这样或那样的原因

而被选取为公理，它的真实性不一定比由它导出的定理更为明显，更为直接。这就是说，公理不一定都是自明的命题。当然，公理还要满足其它一些条件，例如要彼此独立，不会导致矛盾等等。

第一个对集合论进行公理化研究的是德国数学家蔡梅罗。他认为悖论的起因在于康托尔对于集合的概念未加限制。康托尔把集合定义为人们直观的或思维的不同的对象的一个总体，是有些含糊的，因此，应该要求加上一些限制。1908年，蔡梅罗首先建立了集合论的一个公理系统，他的计划是，只准许那些看来不大会产生矛盾的“类”进入集合论。例如空类，任何一个有穷类，以及自然数组成的类，看来是一些安全的类，从它所形成的一些类，诸如任何一个子类，安全类的并都是安全类。但是，他排除了求补集合的运算。因为即使A是一个安全类，A的补类，即在对象的某个大宇宙中所有的非A，也未必是安全类。

蔡梅罗的公理系统经过弗兰克尔和斯科伦的改进与完善，形成了今天著名的蔡梅罗——弗兰克尔集合论公理系统，简称为ZF集合论公理系统。

除了ZF公理系统以外，常用的集合论公理系统还有由冯．诺依曼开创，并由贝尔奈斯和哥

德尔加以改进、简化的公理系统，简称为NBG系统或ZB系统。另外，还有一些其它的集合论公理系统。

从现在的情况看来，最引人注目的是ZF系统。因为集合论的ZF公理系统，对于发展可以说是全部古典分析所需要的集合论是适当的。而且悖论也可以避免到这样的程度，即至今在这个理论之内还没有发现矛盾。我们这一章就是要简明扼要地介绍一下ZF系统。

这个系统主要有：形式语言、逻辑公理和推理规则以及非逻辑公理。这是我们曾在希尔伯特方案中提到的一个具体的形式系统。

1．ZF的形式语言

在对集合论进行公理化研究时，首先要陈述使用什么样的语言。人们日常交往中使用的语言我们称它为自然语言。自然语言中有很多含混之处，不够精确、往往一句话对不同的人有不同的理解，所以不能作为集合论的语言。

为什么在其它数学分支的研究中不太强调语言问题，而在集合论研究中要特别强调呢？这是

因为集合论是其它数学的语言，在一定意义上又形成了其它数学的基础，并且在集合论中并不是每一个“对象的整体”都是集合，而在其它大多数数学分支中，每一个“对象的整体”总是集合。我们在选择语言时，希望这种语言是足够丰富的，使得我们既能够使用它发展集合理论，又要比所谓元数学中使用的语言要简单些。

自然语言是用文字来表达的。汉语用汉字来表达，英语通过英文来表达。而各种语言文字无非是一些符号，通过一定的语言规则形成的符号序列，来表达其涵义的。ZF系统使用的语言是形式语言，这种语言是由形式符号与形成规则组成的。

1）形式符号

ZF形式语言的形式符号包括五类。

（1）变元符号：x，y，z 等等，有时也可以附加下标，如x_1，y_1，z_1等等。变元的取值只能是集合，变元的数目有可数多个。

（2）隶属符号：$\in$，当写出$x\in y$时，表示集合x是集合y的元素。

（3）等词符号：$=$，当写出$x=y$时，表示集合x与集合y是同一个集合。

（4）逻辑符号：$\neg$（否定词），$\wedge$（合取

词），∨（析取词），→（蕴涵词），←→（双蕴涵词），∃（存在量词），∀（全称量词）。∃与∀统称为量词。

（5）技术性符号：左括号（，右括号）。

正如我们在第七章形式系统一节所说的，形式符号表与自然语言中的字母表相似。上述括号中所附注的字可以用作这些符号的读名，也可以初步地暗示其解释。但是要特别强调地指出，这些解释对形式系统的描述来说是毫不相干的。我们进行处理时，必须把形式符号只当作一种标志，而不能当作通常这些符号所表示的意义。我们只假定，每当一些形式符号出现时，我们可以辨认出哪些是相同的形式符号，哪些是不相同的形式符号，哪些不是我们这里的形式符号。

2）形成规则

在自然语言中，仅有字母还不足以表达人们的思想，而是要根据一定的语法规则，把一些字排列成一个序列，形成一句话才能反映人的思想。而且，并非任一文字序列都有意义，有些字母排成的序列毫无意义，只有那些有意义的字母序列才是人们感兴趣的。对于形式语言来讲，也有类似的问题。一个符号序列，只有满足一定条件才是我们考虑的对象。这就是形成规则所要解

决的问题。

ZF语言的形成规则有：

（1）当x，y是变元时，$x \in y$和$x = y$是合式公式，并且称变元x，y在合式公式中是自由出现的。

（2）如果A，B为合式公式，则$\neg A$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$与$(A \leftrightarrow B)$都是合式公式（其中的括号可以省略不写）；在合式公式A中自由出现的变元，在$\neg A$中也是自由出现的，在合式公式A或者B中自由出现的变元，在$A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$与$A \leftrightarrow B$中都是自由出现的。

（3）如果$A(x)$是一个合式公式，且x在$A(x)$中自由出现，则$\exists xA(x)$和$\forall xA(x)$都是合式公式，并且称变元x在$\exists xA(x)$和$\forall xA(x)$中是约束出现的，其它变元是约束的还是自由的都与原来的合式公式中相同。

（4）只有由（1）、（2）、（3）这三条形成的才是合式公式。

形成规则规定了哪些符号序列是合式公式，哪些不是。经过解释以后，合式公式是具有一定意义的符号序列，不是合式公式就是没有意义的符号序列。任给一符号序列（当然是要求由有穷

个符号组成的）根据形成规则（1）、（2）、（3），经过有穷步骤的检验，都可以判定它是否是一个合式公式。形成规则（4）起了封闭作用，就是说只有根据前三条形成的才是合式公式。

为了叙述方便，今后把合式公式简称为公式。

当一个公式中没有自由出现的变元时，就称它为一个语句或者命题。

例如，符号序列

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$$

不仅是一个公式，而且是一个语句。因为由形成规则（1）知

$$z \in x, \quad z \in y, \quad x = y$$

都是公式；由形成规则（2）知

$$z \in x \longleftrightarrow z \in y$$

是公式，且x，y和z都是自由出现的；由形成规则（3）知

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

是公式，其中x和y仍是自由出现的，z是约束出现的；再由形成规则（2）知

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y$$

是公式，且x和y还是自由出现的；最后再次利用形成规则（3）即知所给符号序列是一公式，且其

中的变元x，y和z都是约束变元，所以它是一个语句。

从这个例子我们看到，给定任何一个有穷符号序列，根据形成规则，我们总可以用机械方法，在有穷步骤内判断它是不是一个公式。是不是一个命题。

为了简便起见，我们把ZF形式语言记作$\mathscr{L}$。在$\mathscr{L}$中没有个体常项，因而许多已知的集合，例如空集ϕ就无法表达；也没有函数符号。实际上，这些常项与函数都可以用我们将要叙述的ZF公理去定义的。这些被定义了的集合，或集合的运算，又可以作为广义的形式对象加入形式语言之中，这种扩充了的语言我们称为半形式化语言。下面在叙述一阶逻辑演算时，要把ZF形式语言中的符号稍微扩充一下。

2．逻辑公理和推理规则

首先，我们在$\mathscr{L}$中增添个体常项符号和函数符号(它们都可以是任意多个)，这样扩充后的语言记作$\mathscr{L}$。相应地，对形成规则也要作些补充。

项的形成规则：

1）变元是项；

2）个体常项是项；

3）若 f 是 n 元函数符号，t_1，t_2，…，t_n 是项，则 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 也是项；

4）项都是经有穷次使用1）、2）、3）获得的。

例如：ϕ（空集合），ω（自然数集合）是项，变元 x，y 是项。$P(x)$，$P(y)$，$P(\omega)$ 及 $x\cup y$ 都是项。

在公式的形成规则中，把变元改为项即可。但我们要对一些记号作些说明：

假若 $A(x)$ 是一个公式，变元 x 在其中是自由出现的，t 是一个项。我们用 $A(t)$ 表示把公式 $A(x)$ 中 x 的每一自由出现都换为 t 所得到的结果。这时，我们称 $A(t)$ 是把公式 $A(x)$ 中 x 的每一自由出现都代入项 t 的结果。

例如，设 $A(x):=x\in y\wedge\forall x(x\cup z\in y)$，则 $A(t)$ 应为 $t\in y\wedge\forall x(x\cup z\in y)$。这样代入可能会出现新情况，使代入的结果和原来的公式所表达的意思完全不同了。例如，设

$$A(x)=\exists y(x=\{y\})。$$

则 $A(x)$ 表示集合 x 是一个单元集合。但当取项 t

为 y 作代入，得到

$$A(y)=\exists y(y=\{y\})$$

这就不再表达 y 是单元集合这一事实了。又如，设

$$A(x)=\exists y(y\in\omega\wedge x\in\omega\wedge x)=2y+1)$$

则$A(x)$就表示 x 是一个奇数。取项 t 为 $y+1$，代入后得到

$$A(y+1)=\exists y(y\in\omega\wedge y+1\in\omega\wedge y+1 =2y+1)$$

这不能表达$y+1$是奇数，而表达 ω 中有 0 这个数，因为只有零才能等于它的二倍。上述例子说明，在作代入时，对项 t 要作一定的限制。要区分可代入的与不可代入的。

对于项 t，如果 y 是 t 中出现的变元，在形式为$\exists yB$的部分内不含有A中自由出现的变元x，则称 t 对于A中自由出现的 x 是可代入的，否则称为不可代入的。例如在上述的两个例子中，$A(x)=\exists yB$，在$\exists yB$中含有$A(x)$中自由出现的x，因而 t 对 x 在A中是不可代入的。不难看出，按照上述规定，项 t 为$y+1$，$A(x)=x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge z=\{x,y\}$时，则 x 在公式$A(x)$中是可以代入的。今后，当我们写成$A(t)$时都意味着 t 对$A(x)$中的 x 是可代入的。

1）逻辑公理

现在给出一阶逻辑的逻辑公理，共有四条：

（1）命题公理模式（通常也叫排中律）。一个命题或者是真的，或者是假的，并且二者居其一且仅居其一。因此，对于任一命题 A，$A\vee\neg A$总是真的。于是有：

命题公理模式：

$$A\vee\neg A$$

其中 A 为任意一个命题。

（2）代入公理模式：

$$A(t)\longrightarrow\exists xA(x)$$

其中 A 为任一公式。

（3）恒等公理：

$$\forall x(x=x).$$

（4）恒等公理模式：

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\forall y_1\cdots\forall y_n(x_1=y_1\wedge\cdots\wedge x_n=y_n\longrightarrow f(x_1,\cdots,x_n)=f(y_1,\cdots,y_n))$$

$$\forall x\forall y(x=y\wedge A(x)\longrightarrow A(y))$$

（2）推理规则

一阶逻辑的推理规则有下述五条：

（1）从 A 推出 $B\vee A$。意思是“如果 A 是真

的，那么B或A就是真的。”由于前件中没有析取而后件引入了析取，这个公理又称为“$\vee$引入律”。

（2）从$A\vee A$推出A。意思是“如果A或A是真的，那么A是真的。”这个公理又称为“重言律”。

（3）从$A\vee(B\vee C)$推出$(A\vee B)\vee C$。表示析取词适合结合律。

（4）从$A\vee B$和$\neg A\vee C$推出$B\vee C$。意思是“如果A或B真并且非A或C真，那么B或C真。”

（5）如果x在B中是不自由的，则可从$A\longrightarrow B$推出$\exists xA\longrightarrow B$，所谓$x$在$B$中是不自由的，是指$x$不能在$B$中自由出现，当然允许$x$在$B$中约束出现。

3．ZF公理系统

ZF公理系统包括下述九条非逻辑公理，现分述于下，并给出一些必要的说明。

1）外延公理

这一公理是说“任一集合完全由它的元素所

决定。”用ZF形式语言表示为

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$$

换句话说，如果集合 x 和 y 有相同的元素，那末这两个集合是相等的。

2）空集合存在公理

这条公理是说“存在着一个集合，它没有任何元素。”用ZF形式语言表示为

$$\exists y \forall x(\neg x \in y)$$

换句话说，存在一个集合 y，对于任意集合 x，x 都不属于集合 y，这就是空集合。

根据外延公理，空集合是唯一的。因此，仿照直观集合论，仍用符号 ϕ 表示空集合。

3）无序对集合存在公理

这条公理是说“任意给出两个集合 x 和 y，存在着第三个集合 z，z 的元素恰好有两个，一个是 x，另一个是 y”。用符号写出来就是

$$\forall x \mathrm{A} y \exists z \forall t(t \in z \longleftrightarrow t = x \vee t = y)$$

这条公理保证，给了两个集合 x，y，存在集合 $z = \{x, y\}$。当 $x = y$ 时，保证存在单元集合 $\{x\}$。

由公理2）和3），我们从 ϕ 开始，可构造许多集合，如 $\{\phi\}$，$\{\phi, \{\phi\}\}$，$\{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}$，$\{\{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$ 等等。但不管怎样复杂，只能构造含有一个元素或者两个元素的集合，而

不能构成含有更多个元素的集合。

4）并集合存在公理

这条公理是说“对于任给一个集合 x，存在一个新的集合 y，y 是把 x 的元素的元素汇集在一起所形成的集合。”记作 $y=\bigcup x$。用ZF形式语言写出来就是

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow\exists t(z\in t\wedge t\in x))$$

换句话说，一个集合 x 的并集合 $\bigcup x$ 是由 x 的元素的元素组成的集合。这一公理保证任意集合的并集合的存在性。当 $x=\{y,z\}$ 时，$\bigcup x=\bigcup\{y,z\}=y\bigcup z$，即任二集合的并是集合。

5）幂集合存在公理

这条公理是说“任意的集合 x，$P(x)$ 也是一个集合。”用ZF形式语言可写成

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow\forall t(t\in z\rightarrow t\in x))$$

显然，$\forall t(t\in z\longrightarrow t\in x)$，表示 z 的任意一个元素 t 都是 x 的元素，即 z 是 x 的子集合，仿照直观集合论记作 $z\subseteq x$。那么这一公理就可写作

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow z\subseteq x)$$

（$z\subseteq x$ 已不是ZF的形式语言，此式为半形式化语言所表示的公式）。因此，满足这一公理的集合 y 正好是 x 的幂集合。

仅有以上五条公理，不能保证存在一个无穷集合，即元素为无穷多个的集合。为了叙述无穷集合存在公理，我们先陈述集合论的一个基础公理

6）正则公理，也叫基础公理

$$\forall x(\exists y(y\in x)\longrightarrow\exists y(y\in x\wedge\forall z(z\in y\longrightarrow\neg z\in x))$$

$\exists y(y\in x)$ 表明 x 不是空集合，即 $x\neq\phi$。$\forall z(z\in y\longrightarrow\neg z\in x)$ 表示 y 的任一元素都不是 x 的元素，即集合 y 与 x 没有公共元素，仿直观集合论，记作 $y\cap x=\phi$，这一公理用半形式化语言表示为

$$\forall x(x\neq\phi\longrightarrow\exists y(y\in x\wedge y\cap x=\phi))$$

因此，这一公理就是说"对于任意一个非空集合 x，都存在它的一个元素 y，使得 y 的任何元素都不是 x 的元素。"换句话说，这条公理肯定任一非空集合都存在有一个极小元。这条公理的目的在于排除具有 $x\in x$ 这种性质的（奇异）集合 x。它是对集合的一种限制，也称为限制公理。

7）无穷公理（或称无穷集合存在公理）

这条公理肯定"存在一个集合，它有无穷多个元素。"用符号表示出来就是

$$\exists x(\exists y(y\in x)\wedge\forall z(z\in x\longrightarrow z\cup$$

$\{z\}\in x))$

其中$\exists y(y\in x)$表示x是不空集合，$z\cup\{z\}$是集合z和单元集$\{z\}$的并集合，称它为z的后继集合。由正则公理$z\notin z$，但显然$z\in z\cup\{z\}$.所以，$z\subset z\cup\{z\}$。这样一来。$\forall z(z\in x\longrightarrow z\cup\{z\}\in x)$就是说$z$是$x$的元素时，$z$的后继也是$x$的元素。这一性质保证了$x$的无穷性。

如果在这条公理中，取$y=\phi$，则它保证所有自然数组成一个集合，这个集合是无穷集合。

8）替换公理模式

设$A(x,y)$是ZF形式语言中的任一公式。如果对于任意的集合t，当$x\in t$时都存在y，使得$A(x,y)$成立，那么就一定存在一个集合S，使得对于所有的$x\in t$，在集合S中都有一元素y，使得$A(x,y)$成立。也就是说，由$A(x,y)$所确定的有序对组成的类

$$\{\langle x,y\rangle \mid A(x,y)\}$$

当其定义域在集合t中时，那么它的值域可限制在集合S内。用公式来表示就是：

$$\forall t(\forall x\in t\exists yA(x,y)\longrightarrow$$

$$\exists S\forall x\in t\exists y\in SA(x,y))$$

由替换公理模式可以推出一种重要的模式，常常称为子集合公理模式，或分离公理模式，这

就是：对于任一ZF公式$A(x)$都有

$$\forall t\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow z\in t\wedge A(z))$$

也就是说，把集合t中那些具有性质$A(z)$的所有元素z汇集在一起，一定形成一个集合y。

这里我们称它为公理模式，是因为它不是一条公理，实际上是无穷多条公理。这是因为ZF形式语言中的公式有$\aleph_0$个，所以这是$\aleph_0$条公理

例如，设$A(x)$为一ZF公式，S为一集合，由分离公理知

$$\{x\mid A(x)\wedge x\in S\}$$

是一集合，且它是S的子集合，它是从集合S中由性质$A(x)$分离出来的子集合。如果在上述公式中取$A(x)=x\in S_1$，S_1为一集合，则分离公理保证

$$\{x\mid x\in S_1\wedge x\in S\}$$

是集合。这就说明通常定义两个集合S_1和S的交集合$S_1\cap S$是合理的。

9）选择公理

这一公理有许多等价形式，我们仅列举两种：

1904年蔡梅罗的形式：对任一不空集合x，都存在一个函数f，其定义域为x的所有非空元素，取值分别在其作用的不空集合之中，用符号

表示就是：

$$\forall x(x\neq\phi\longrightarrow\exists f\forall y(y\in x\wedge y\neq\phi\longrightarrow f(y)\in y))$$

常把这一公理记作AC。

1906年罗素的形式：设 x 是不空集合的不交集合（即 x 的任一元素都是非空集合，且 x 的任二元素的交集合是空集合），存在一个集合 C，它恰好由 x 中每一集合的一个元素所组成。用符号表示为：

$$\forall x(\forall y(y\in x\longrightarrow y\neq\phi)\wedge\forall y\forall z(y\in x\wedge z\in x\wedge z\neq y\longrightarrow y\cap z=\phi)\longrightarrow\exists u\forall y(y\in x\longrightarrow\exists!\ t(t\in y\wedge t\in u)))$$

其中 $\exists!tA(t)$ 表示存在的唯一的 t，使得 $A(t)$ 成立。用ZF语言写出来 $\exists!t(t\in y\wedge t\in C)$ 就是：

$$\exists t(t\in y\wedge t\in u\wedge\forall v(v\in y\wedge v\in u\longrightarrow v=t))$$

上面陈述的公理1—9，就是通常说的ZF公理系统。有时为了讨论选择公理的作用，也把公理1—8记为ZF，公理9记作AC，而把公理1—9记作ZFC。

注记 1 策梅罗1908年给出的公理系统中没有替换公理模式，而是列举了分离公理模式。前面我们已经指出，由替换公理模式能推出分离公理模式，但反之不行，

即只有分离公理模式连同其他公理不能推出替换公理模式，而没有替换公理模式，有些重要的集合就无法获得。根据弗兰克尔和斯科伦的意见，系统内就增加成了替换公理模式，为简便起见，也常常省略分离公理模式。

注记 2　康托尔朴素集合论的毛病出在他关于集合的定义上。他认为，如果 P 是一种“性质”，那么具有性质 P 的所有对象就能组成一个集合。即

$$\{x \mid P(x)\}$$

是一个集合。什么是性质？说不清楚。在策梅罗的分离公理中，用公式 $A(x)$ 代替了性质 $P(x)$。从而肯定

$$\{x \mid A(x) \wedge x \in S\}$$

是集合。这与康托尔定义是不同的。这一公理保证：具有性质 A，且同时又是一个集合 S 的元素，才能组成一个集合。这就是说，不是任一性质都能决定一个集合，而是要包含在某一集合之中；也不是集合的任一部分都是集合，而且还要能用某一公式表达或分离出来。这二条缺一不可，除非用其它公理来确定某一集合的存在性。

注记 3　在ZF的九条非逻辑公理中，有六条公理（即空集合存在公理，无序对集合存在公理，并集合存在公理，幂集合存在公理，无穷集合存在公理和替换公理模式）都是对康托尔集合的具体化。试图通过这六条公里把康托尔集合论中的合理的内容全部保留下来，避开引起悖论的副作用。这六条公理以及选择公理，是ZF系统中关于集合的存在性公理。而另外两条公理（外延公理和正

则公理)是对集合的刻画，或者说是对集合的限制。外延公理也是表达了康托尔的思想：集合是由它的元素决定的。正则公理的目的在于排除奇异集合。

4．ZFC的协调性

ZFC作为一个公理系统，应该满足一些最基本的要求。首先，是公理系统的协调性（或称一致性，无矛盾性）问题，即从它不能推导出矛盾；其次，是完全性问题，即是从它能推导出集合论中所有定理；第三，系统中的各个公理最好是独立的，即没有一个公理可以从其它公理推出。当然协调性问题是最重要的。

对于语言中的一个公式或一个语句A，如果它是ZFC的一条公理或者是一条逻辑公理；或者是从逻辑公理与ZF公理出发，使用逻辑推理规则1)—5)，在有穷步内可以推出A，那么我们就称A是ZFC中的一个定理，记作ZFC$\vdash A$。其中符号"$\vdash$"为元数学符号，表示"推出"的意思。

设Γ为一公式的集合，如果存在一公式A（不要求A在Γ中）使得

$$\Gamma\vdash A\wedge\neg A$$

即由Γ推出A且又推出$\neg A$，则称Γ是不协调的

(或称Γ是矛盾的)，如果不存在公式A，使得上式成立，则称Γ是协调的。

ZFC是否是协调的呢?

在一阶逻辑基础上，人们使用ZFC公理推导出康托尔集合论中的所有定理，并且集合论中已出现的悖论都避开了。例如罗素悖论中的$T=\{x|x\notin x\}$，由于找不到一个集合把T给包起来，在ZFC中没有办法证明它是一个集合，因此，T是否属于T这个问题就没有意义了。又如康托尔悖论，由于无法证明存在一个集合V，它以所有集合为元素，所以康托尔问题也就不存在了。出现悖论的原因在于把T，V当作集合。在现代集合论文献中，都把它们称为类。对任意一个公式$A(x)$，称$\{x|A(x)\}$是类。只有当类包含在某个更大的集合之内时，类才是集合，不是集合的类叫做真类。上述的T与V都是真类。

ZFC系统消除了朴素集合论中的悖论，但它本身是否会出现新的矛盾呢，这是一个尚未解决的问题。正如庞加莱评论这一问题时所指出的，"为了防备狼，羊群已经用篱笆围起来了，但是却不知道在羊圈内有没有狼。"人们用公理系统围住了一群集合，但是在这个系统内有没有悖论还不知道。

希尔伯特曾经提出，要在一个形式系统内证明它的协调性问题。他以及他的学派也确实证明了一些简单形式系统的协调性。并且他们相信他们将解决集合论的协调性问题。但是，哥德尔1931年证明了：任何一个足够丰富的系统（在其中能表达算术系统），如果这个系统是协调的，那么它的协调性在此系统内是不能证明的。当然，ZF系统能表达算术系统，它是足够丰富的，它的协调性在ZF系统内也是不能证明的。

于是，只能改变问题的提法：如果ZFC系统是协调的，会有些什么样的结论呢？为了介绍有关结果，我们需要模型的概念。

ZF形式语言中的符号只是一些形式对象，并没有赋予任何意义。要给这些形式符号赋予意义，就必须在某一论域中进行讨论。所谓论域是指一个不空的具体的类M。我们要在论域M中讨论命题的真假问题。这就要在M上取定一个二元关系$\in_M$。现在对ZF形式语言中任一公式A，在M中作这样的解释（或翻译）：A中出现的任意给定的集合都解释为M中的元素，形式符号$\in$解释为M中的二元关系$\in_M$，变元解释为变域为M的变元，逻辑词项赋以M上相应的直观含义，并且把在M上解释后的公式A记为A^M。当A是一形

式命题时，A^M就是关于M的一个命题，它或者是真的，或者是假的，二者必居其一且仅居其一。

对ZF中任一公式A，如果其中自由出现的不同的变元为x_1，x_2，…，x_n，并且在A中不再自由出现其它变元。我们称命题

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$$

为公式A的全称闭包，并记作（　）A。显然，如果A是命题，则（　）$A=A$。

设A是公式，如果有一不空类M作为论域，且有一种解释使得$((\ )A)^M$是M中的一个真命题，就称M是A的一个模型，并记作$M\models A$。

对于一个公式集合Γ，如果有一不空类M作论域，并且有一种解释，使得Γ中每一公式的全称闭包在M中都是真命题，则M就是Γ的模型，记作$M\models\Gamma$。

设Γ是由ZF公式构成的集合。如果Γ有模型，则Γ是协调的。如果Γ是ZF语言中命题的协调集合，则Γ有模型。因此粗略地说，要证明ZF的协调性，必需采取另外的手段，构造出一个不空类M，使得$M\models$ZF。

作为ZF的论域V可以如下定义：

$$V_0:=\phi,$$

$$V_{\alpha+1}:=P(V_\alpha),$$

$V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$，$\lambda$为极限序数。

$V := \bigcup_{\alpha\in O_n} V_\alpha$。

V是一个有层次的结构。显然

$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$

最底层V_0是空集ϕ，其中不包含元素。第一层V_1是空集合的幂集$P(\phi)=\{\phi\}$，它只包含一个元素ϕ；第二层V_2是$\{\phi\}$的幂集合$P(\{\phi\})=\{\phi, \{\phi\}\}$，有$2^1=2$个元素$\phi$，$\{\phi\}$；第三层是$V_3=P(\{\phi \{\phi\}\})$，有$2^2=4$个元素$\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}$；如此继续下去，当$n$为自然数时，第$n$层包含了$2^n$个元素。遇到第一个极限序数$\omega$，就把第$\omega$层以前各层取并集合，即得到$V_\omega = \bigcup_{\alpha<\omega} V_\alpha$。于是，又采取取幂集合的办法，构造出$V_{\omega+1}$，$V_{\omega+2}$，…第二个极限序数是$\omega\cdot 2$，于是又可作出$V_{\omega\cdot 2} = \bigcup_{\alpha>\omega\cdot 2} V_\alpha$，这一过程可以一直继续作下去，当对一切序数$\alpha$都定义了$V_\alpha$之后，再置$V = \bigcup_{\alpha\in O_n} V_\alpha$（见图8·1）。

在如此构造了V以后，ZF中的集合是什么呢？它就是我们所得的层次中的某一元素。假若x，y是集合，且$x\in V_\alpha$，$y\in V_\beta$。如果V_β在层次中高于V_α（即$\alpha<\beta$），那么，由我们的构造过程可以看出，$x\in V_\beta$。因为每一层次都包含了低于

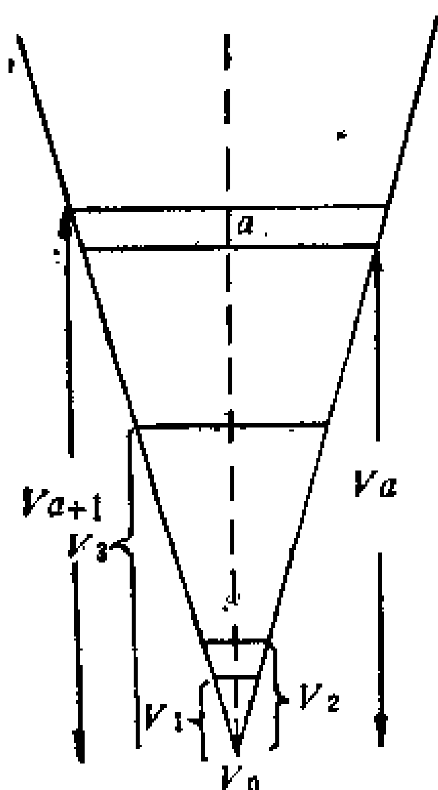


图8·1

它的一切层次的元素，$x\in V_\alpha$，则对一切$\beta\geqslant\alpha$，必有$x\in V_\beta$。我们把使$x\in V_{\alpha+1}$成立的最小的α，叫做集合x的秩，记做rank(x)。例如rank(ϕ) = 0，rank($\{\phi\}$) = 1，rank($\{\phi, \{\phi\}\}$) = 2。并且对于每一个序数α，rank(α) = α。

由于集合论中的一些基本概念，如集合、关系、函数、序数、基数等等都可用公式来表达，因此，这些概念及定理都可以直接搬到ZF系统内，并进一步搬到它的模型V中来。在此不再一一叙述，读者如果把这些工作当作练习来做，那是很有益的。

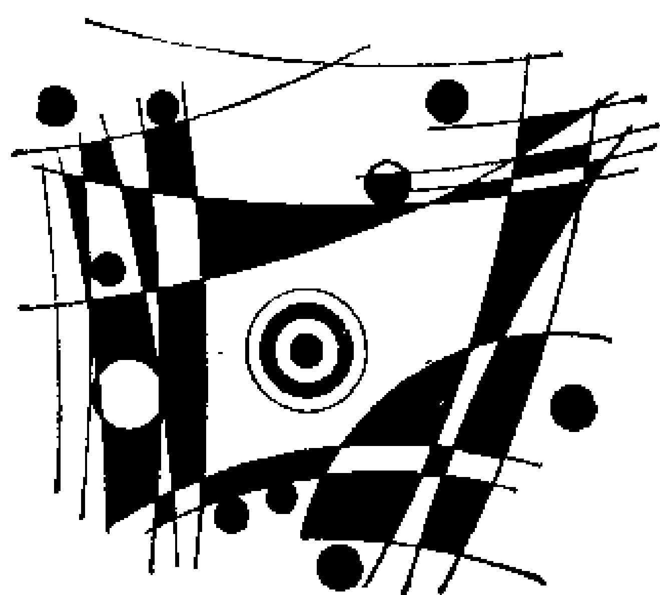
5. 历史注记

1）蔡梅罗在1908年的著名论文《关于集合论基础的研究工作》中，采用把集合论公理化方法来消除罗素悖论，最先提出集合论公理系统，其意义是非常重大的。

2）斯科伦1922年在第五届斯堪的那维亚数学家大会上做了公理化集合论的报告，对蔡梅罗公理系统提出批评。蔡梅罗系统太狭窄，不能满足集合论的要求，许多集合不能由它产生出来。为了弥补这一缺陷，弗兰克尔加进了替换公理模式，并把公理用符号逻辑表示出来。

3）冯·诺依曼开辟了集合论的第二个公理系统。在蔡梅罗——弗兰克尔系统中是通过限制集合来避开悖论的。但冯·诺依曼认为这样施加限制有点过于苛刻。他觉得悖论的起因在于用了过大的总体。在他建立的公理系统中，承认有两种类型的类，即集合与真类。集合可以是其它类的元素，而真类则不能是其它类的元素。从而也避免了悖论。并且冯·诺依曼的公理系统是蔡梅罗——弗兰克尔系统的保守扩充。

九 连续统假设的相对协调性



本章的目的是直观地阐述哥德尔在1938年对连续统假设所作出的重大贡献。

1. 协调性与相对协调性

康托尔猜想CH成立，如果这一猜想是正确的，就应当给出它的一个证明。用近代的术语就是说，它应当从ZF系统中推演出来， 亦即ZF⊢CH。然而，从康托尔提出这一猜想起，五十多年这一问题没有进展。哥德尔在1930年已开始思索连续统问题，当时他已熟悉罗素的分支类型论和莱文海姆——斯科伦定理，后者在本章及下一章中我们将给出说明，并运用这一定理去说明哥德尔的结果。

为了说明哥德尔的结果，我们尚需引进几个重要的概念和定理。

对于ZF语句（即命题）的一集合S而言，如果不存在ZF的一语句A（不要求A一定在S中），使得从S既可以推演出A，又可以推演出$\neg A$，则称S为协调的，否则称S为不协调的，关于协调性与可推演性（即可证明性），对于任意的语句集合S和命题A，下述三条基本性质是不难获得的。

1) $S \cup \{\neg A\}$不协调，当且仅当从S可推演出A，即$S \vdash A$。

2)若$S \cup \{A\}$协调，则$S \nvdash \neg A$。

3)若$S \cup \{\neg A\}$协调，则$S \nvdash A$。

今后为了书写方便起见，常常把$S \cup \{A\}$，$S \cup \{\neg A\}$分别记作$S+A$，$S+\neg A$。

下边我们考虑ZF这一形式系统的一些语义概念。

在数学中一结构是指一不空的对象集合u和它上一个二元关系R，即$R \subset u \times u$，这样对于任意给定的元素$a, b \in u$，$\langle a, b\rangle \in R$或者成立，或者不成立，为方便起见，常把$\langle a, b\rangle \in R$记作$R(a, b)$或$a R b$。

对于ZF的任意给定的一公式A，对于任一

结构$<u, R>$，我们施归于A的复杂性来建立公式A对于$<u, R>$的解释（即赋值）的概念，从而就有了A对$<u, R>$成立，即A在$<u, R>$中真的概念，这时记作$<u, R>\models A$，也就有了A在$<u, R>$中假的概念了，这时记做$<u, R>\not\models A$。

所谓解释就是把ZF形式语言中的对象，解释到结构中，即有一个从ZF语言到$<u, R>$的一个映射φ，使得ZF语言中任意的常项和已定义的对象a都映射到u中的元素，$\varphi(a)\in u$。把ZF中的逻辑关系和属于关系分别映射到结构$<u, R>$的逻辑关系与关系R，并且据A的复杂性，定义$<u, R>\models A$如下：

1) $<u, R>\models a\in b$ 当且仅当 $\varphi(a)\in u$ 且 $\varphi(b)\in u$ 且 $\varphi(a)\, R\, \varphi(b)$；

2) $<u, R>\models \neg A_1$ 当且仅当 $<u, R>\not\models A_1$；

3) $<u, R>\models A_1\vee A_2$ 当且仅当 $<u, R>\models A_1$ 或者 $<u, R>\models A_2$；

4) $<u, R>\models A_1\wedge A_2$ 当且仅当 $<u, R>\models A_1$ 且 $<u, R>\models A_2$；

5) $<u, R>\models A_1\longrightarrow A_2$ 当且仅当 $<u, R>\models A_2$ 或者 $<u, R>\not\models A_1$；

6) $<u, R>\models \forall x A(x)$ 当且仅当对于每一x

$\in u$，都有 $<u, R> \models A(x)$；

7）$<u, R> \models \exists x A(x)$ 当且仅当在 u 中有一 x，使得 $<u, R> \models A(x)$。

当 $<u, R> \models A$ 时，我们也称 A 是 $<u, R>$ 可满足的，或者说，$<u, R>$ 是 A 的一模型。在不引起误解时，也简记做 $u \models A$，并称 A 是 u 可满足的，或 u 是 A 的一模型。当 R 为 u 上的属于关系 $\in$（即 $R = \in \cap u^2$，或者说 $R = \in$。时，就称 $<u, R>$ 为一标准结构。这时若有 $u \models A$，就称 u 为 A 的一标准模型。

对于 ZF 语言中一命题 A 而言，如果有结构 $<u, R>$，使得 $<u, R> \models A$，则称 A 是可满足的，或称 A 是有模型的。对于 ZF 语言中任意给定的语句的一集合 S 而言，如果有一结构 $<u, R>$ 使得 S 中每一语句 A，都有 $u \models A$，则称 S 是一起可满足的，或称 S 是有模型的。

关于可满足性和有模型的概念，对于 ZF 语言中的任一语句集合 S，任一语句 A，我们有下述性质：

1）对于同一结构 $<u, R>$ 而言，不能有 $u \models A$ 与 $u \models \neg A$ 同时成立；

2）可能有结构 $<u_1, R_1>$ 与 $<u_2, R_2>$ 使得 $<u_1, R_1> \models A$ 与 $<u_2, R_2> \models \neg A$ 都成立；

3）可能有，对于任意的结构 $\langle u, R\rangle$，都有 $\langle u, R\rangle \models A$，也就是说 A 是没有模型的或称 A 是不可满足的；

4）可能有结构 $\langle u, R\rangle$ 使得它是 S 的一模型；

5）可能有，对于任意的结构 $\langle u, R\rangle$，它都不是 S 的一模型，这时就称 S 为不可一起满足的，或称 S 为无模型的。

协调、可推演都是语法概念，而可满足、有模型都是语义概念。两个的关系是什么呢？这由哥德尔1930年建立的完全性定理作了回答。

哥德尔完全性定理　对于任意给定的语句集合 S 而言，我们有：

S 是协调的当且仅当 S 有模型。

这是数理逻辑中一条基本定理，上述形式是经过1949年钦勤简化后的形式。

依据完全性定理，协调性与可满足性的性质，针对ZF，AC与CH，我们有如下的结论：

1）若ZF＋AC有模型，则ZF $\nvdash$ ¬AC。

2）若ZF＋¬AC有模型，则ZF $\nvdash$ AC。

3）若ZFC＋CH 有模型，则 ZFC $\nvdash$ CH。

4）若ZFC＋¬CH 有模型，则 ZFC $\nvdash$ CH。

然而，1—4 的前提是否成立呢？哥德尔指

出：若ZF有模型，则ZF+AC与ZFC+CH有模型，说明这一结果是本章的基本目的，2与4是科恩的结果，我们将在下一章给以说明。对于前者，我们分别称作AC相对ZF是协调的和CH相对于ZF是协调的，也就是说ZF是有模型的，并且总是把这一模型看作是集合论的论域或全域V。由此出发，我们去构做的一个子域，这一子域是由V中的可定义性获得的，下边，我们开始于给定集合的可定义子集合。

2. 可定义子集合

我们已经说明了集合论形式语言（即ZF语言）和ZF公理系统中的分离公理。对于任一给定的集合S和任意给定的集合论公式$A(x,t_1,\cdots,t_n)$，其中x为自由出现的变元，并且把t_1，…，t_n看作在其中出现的参量，没有其它变元在其中自由出现。现在任取$s_1,\cdots,s_n\in S$，把此公式中的参量t_1，…，t_n分别替换为s_1，…，s_n，并且把A中出现的每一形式为$\forall y$的量词换为$\forall y\in S$，每一形式为$\exists y$的量词换为$\exists y\in S$，也就是说，A中所有的全称量词仅在S中变化，仅取S中的

任意元素，A中所有的存在量词仅取S中的某些元素，这样获得的结果记为 $A_S(x, s_1,\cdots,s_n)$。这时，我们称集合

$$\{x|x\in S\wedge A_S(x, s_1,\cdots,s_n)\} \quad (9\cdot1)$$

为S的一个可定义子集合。更确切地说，式(9·1)是S经公式$A(x, t_1,\cdots,t_n)$且参量t_1, …, t_n分别取为s_1, …, $s_n\in S$所得的可定义子集合。不同的公式可能定义出S的不同子集合，也可能相同，这要视S与公式A而定。若S为一有穷集合，则S的所有子集合也是有穷的。例如$S=\{a_1, \cdots, a_n\}$，它的子集合共有2^n个，每一个子集合都是可定义的；例如定义S的子集合$\{a_1, a_2\}$的公式可以是$x=a_1\vee x=a_2$。定义S的子集合$\{a_{i1}, \cdots, a_{ik}\}$的公式可以是$x=a_{i1}\vee\cdots\vee x=a_{ik}$，由于其中$k\leqslant n$，显然，这是一个ZF公式，并且它定义了上述集合。

若S为无穷集合，则它有无穷多个可定义子集合。例如，我们考察ω的可定义子集合。首先，ω的任一有穷子集合都是可定义；其次，考察ω的无穷子集合的情况。众所周知，自然数的加法运算“+”与乘法运算“·”都是ZF可定义的，也就是说，当x, y, z为自然数时，$x+y=z$与$xy=z$都可以表示为ZF公式，这样奇数集

合可以由公式$\exists y(x=2y+1)$定义，偶数集合可以由公式$\exists y(x=2y)$定义。“x是一素数”可以表示为$\forall y\forall z(1<y<x\wedge 1<z<x\longrightarrow x\neq yz)$，这一公式就定义了素数集合。我们把“$x$是一素数”写作$p_r(x)$，双生数集合就可以表示为：$p_r(x)\wedge p_r(x+2)$。哥德巴赫偶数形式集合就可以表示为

$$\exists y(x=2y\wedge y>1\wedge\exists y\exists u(p_r(z)\wedge p_r(u)\wedge x=z+u))$$

为了熟习集合的可定义子集合的概念，读者应当多作一些练习，可先考察ω的更多的可定义子集合。

对于任意给定的集合S，我们用$P_D(S)$表示S的所有可定义的子集合。

3. 可构成集合

对于给定的集合S，我们令S'为S的所有可定义子集合与S之并集合，也就是说

$$S':=S\cup P_D(S)$$

显然，$S'\subset P(S)\cup S$，如果S为无穷集合由选择公理有$\overline{\overline{S'}}=\overline{\overline{S}}$，这是由于ZF公式只有可数多

个。不难看出，一集合的可定义子集合是可以用集合论语言中的形式公式能够抓住的子集合。其它子集合是用形式公式没有办法提取的。这样看，对于一无穷集合 S 而言，由选择公理可以用公式提取子集合的数目和 S 是相同的。所以，这时 S 总有不可定义的子集合。

我们可以超穷递归地定义中一系列集合：

$$M_0:=\phi$$

$$M_\alpha:=(\cup\{M_\beta|\beta<\alpha\}), \qquad (9\cdot 2)$$

其中 α 为任意的序数，由以上定义，显然有：

$$M_1=\{\phi\}$$

$$M_2=\{\phi,\{\phi\}\}$$

$$M_3=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

$$M_4=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\{\{\phi\}\}\},$$
$$\{\{\phi,\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\phi\}\},\{\phi,$$
$$\{\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\},$$
$$\{\{\phi\},\{\{\phi\}\}\},\{\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\},$$
$$\{\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\phi,$$
$$\{\phi\},\{\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\{\phi\}\},$$
$$\{\phi,\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\phi,$$
$$\{\phi\}\}\},\{\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,$$
$$\{\phi\}\}\},\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,$$

$\{\phi\}\}\}\}$

当我们采用下述定义时，

$0:=\phi$

$1:=\{\phi\}$

$2:=\{0, 1\}$

$3:=\{0, 1, 2\}$

$\vdots$

$n+1:=\{0, 1, \cdots, n\}$.

$\vdots$

上述M_i就简化为：

$M_0=0$

$M_1=1$

$M_2=2$

$M_3=\{0, 1, \{1\}, 2\}$

$M_4=\{0, 1, \{1\}, \{\{1\}\}, \{2\}, 2, \{0, \{1\}\}, \{0, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{1, 2\}, \{\{1\}, 2\}, \{0, 1, \{1\}\}, \{0, \{1\}, 2\}, 3, \{1, \{1\}, 2\}, \{0, 1, \{1\}, 2\}\}$

对于任意给定的自然数n，我们就能够获得集合M_n，容易看出，它们有下述基本性质：

1）$M_0\subset M_1$，$M_1\subset M_2$，$M_2\subset M_3$．且$M_3\subset M_4$，一般地，由数学归纳法可以证明，对于任意

的自然数n，m，且$n<m$，有$M_n\subset M_m$；

2）$0\in M_1$，$1\in M_2$，$2\in M_3$，$3\in M_4$，一般地，$n\in M_{n+1}$；

3）M_0，M_1，M_2，M_3，M_4 都是传递的，并且对于任一自然数n，M_n是传递的。也就是说，对于任意集合x，y，若$y\in x$且$x\in M_n$，则$y\in M_n$。

使用超穷归纳法，不难证明上述三条基本性质均成立，也就是说，我们有：

1）对于任意的序数α，β，若$\beta<\alpha$，则$M_\beta\subset M_\alpha$；

2）对于任意序数α，$\alpha\in M_{\alpha+1}$，并且若λ为一极限序数时，就有$\lambda\in M_\lambda$；

3）对于任意序数α，M_α是传递的。

对于一个集合x而言，若存在序数α，使得$x\in M_\alpha$，则我们称集合x是可构成的。

根据上述可构成集合的定义，不难获得：从空集合出发，经过无序对、并、交和幂运算得到的任何有穷集合都是可构成的。任一序数都是可构成的集合。

所有可构成集合搜集在一起，组成一类，人们记做L，也就是说，对于任意一集合x而言，有

$x\in L$ 当且仅当有序数α使得$x\in M_\alpha$

(9.3)

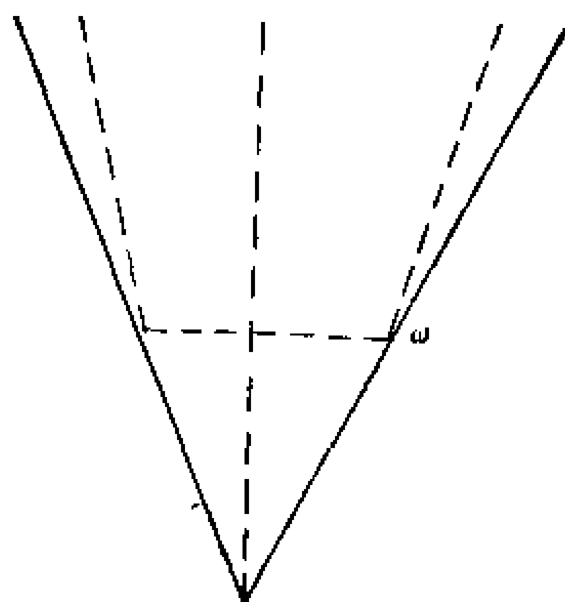


图9.1　L是V的子部分示意

容易理解，L是V的一个子部分（图9.1）。

4. ZF的每一公理都在L中成立

本节的目的是证明ZF系统中的每一条公理在L中都是成立的，而且有些是相当容易的，甚至是很明显的。

1）外延公理在L中成立，这就要求证明：对于L中的任意元素x，y，z，若$z\in x$当且仅当$z\in y$，则$x=y$。

我们曾经指出，M_α 是传递的。现在，我们再直接证明对于 L 这一结论是正确的。设 $x\in L$，即有序数 α，$x\in M_\alpha$，且设 $z\in x$，由 M_α 的定义，有 $z\in\bigcup\{M_\beta\mid\beta<\alpha\}$，这样，$z\in M_\alpha$，由此，也获得 $z\in L$。因此，L 是传递的。

由 L 的传递性，x，$y\in L$ 及 $\forall z\in L(z\in x\longleftrightarrow z\in y)$，就可以很容易地获得 $x=y$ 了。假定不然，$x\neq y$ 就一定有 z 使得 $z\in x$ 且 $z\notin y$，或者 $z\notin x$ 且 $z\in y$。不失一般性，设 $z\in x$ 且 $z\notin y$，这时由 L 的传递性，及 $z\in x$，有 $z\in L$，由前提，有 $z\in y$，这于 $z\notin y$ 矛盾，由反证法，即得 $x=y$。这就证明了外延公理在 L 中成立。

2）空集合存在公理在 L 中是显然的。因为 $\phi\in M_1$，从而有 $\phi\in L$。

3）无序对公理在 L 中成立。假定 $x\in M_\alpha$，$y\in M_\beta$，$\alpha\leqslant\beta$。这时 x，y 都在 M_β 中，从而有：

$$\{x,\ y\}=\{z|z\in M_\beta\wedge(z=x\vee z=y)\}$$

由此，有 $\{x,\ y\}\in M_{\beta+1}$，所以，$\{x,y\}\in L$。这就是无序对公理在 L 中成立。

4）并集合公理在 L 中成立。假设 $x\in M_\alpha$，由此有：

$$\{z|z\in M_\beta\wedge\exists_y(y\in x\wedge y\in M_\beta\wedge z\in y)\}$$

在 $M_{\alpha+1}$ 中。因此，并集合公理在 L 中成立。

5）幂集合公理在L中成立。对于任一集合x，令$P(x)$是x的幂集合，且令

$$P_L(x):=\{y|y\in P(x)\wedge y\in L\}$$

也就是说，$P_L(x)$为集合：

$$\{y|y\subset x\wedge y\in L\}$$

现在考察集合$y\in P_L(x)$，令$\varphi(y)$为使得$y\in M_\alpha$成立的最小的序数α。由于我们的证明可以是在ZF中进行的，因此，可以使用ZF的替换公理，$S:=\{\varphi(y)|y\in P_L(x)\}$是一集合，且令$\beta=\sup\{\alpha|\alpha\in S\}$。因此，若$y\in P_L(x)$，则$y\in M_\beta$。令

$$S_1:=\{y|y\in M_\beta\wedge\forall_u(u\in M_\beta\longrightarrow(u\in y\longrightarrow u\in x))\}$$

显然，$S_1\in M_{\beta+1}$且$S_1=P_L(x)$。这样，由于$P_L(x)$为可构成的，就有了幂集合公理在L中成立这一结论。

6）由于$S'\subset P(s)\cup S$，运用超穷归纳法，不难证明每一可构成集合都是良基的。这样，我们就获得了正则公理在L中成立。

7）不难证明$\omega\in M_\omega$，因此，$\omega\in L$。而ω为无穷集合。这样无穷公理在L中成立。

8）替换公理在L中成立。也就是去证明：$A(x,y;t_1,\cdots,t_n)$是一ZF公式，A_L指相应的相对公式，若$t_i\in L$，A_L定义L中一函数$y=\varphi(x)$

（即由$x\in L$得到 $y\in L$，其中 $y=\varphi(x)$），则φ对于$u\in L$的值域v在L中，亦即令$v:=\{\varphi(z)|Z\in u\wedge u\in L\}$有$v\in L$．为此，先证有 $w\in L$，使得 $v\subset w$。

因为，对于每一$x,x\in u,\varphi(x)\in L$，令$g(x)$为使得$\varphi(x)\in M_\alpha$的那个最小的序数α，并且令$\beta=$ up$\{g(x)|x\in u\}$，显然，有$v\subset M_\beta$，$M_\beta\in L$。取M_β为上述集合w即得欲证结果。

其次，我们来证明$v\in L$。依据上述w，不妨假定u，t_1，…，t_n均在w中，运用莱文海姆——斯科伦定理作可构成壳w'，即 $w'\in L$，因此有某一γ，使得 $w'\in M_\gamma$，对于任意给定的集合x，y，都有：

$$A(x,\ y;\ t_1,\cdots,t_n)$$

$$\Longleftrightarrow A_{w'}(x,\ y;\ t_1,\ \cdots,\ t_n) \qquad (9.4)$$

由上述说明和式（9·4）就有

$$v=\{y|y\in w'\wedge\exists x(x\in u$$

$$\wedge A_{w'}(x,\ y;\ t_1,\ \cdots,\ t_n))\} \qquad (9.5)$$

在（9·5）式中，定义v的公式中的所有变元都是限制在M_γ中的。因此，有$v\in M_{\gamma+1}$。这样，$v\in L$，从而就获得了替换公理在L中成立。

在上述证明中，我们用到了莱文海姆——斯科伦定理，这里尚需做进一步的说明。这是数理

逻辑中的一条基本定理，它是莱文海姆在1905年以特例的形式给出，并且在1920年由斯科伦加以改进和推广的结果。这一定理可以有许多形式，用途很广，已成为模型论的基础定理之一。对于可构成性来讲，我们已用到的是如下的形式：

莱文海姆——斯科伦定理 若$A(x_1, \cdots, x_n)$是一个ZF公理，在其中所有的变元（包括自由的和约束的）都是被限制在L中取值的，且$S \in L$，则存在一集合$S' \in L$，$S \in S'$，使得对于任意给定的$x_1, \cdots, x_n \in S'$，都有

$$A(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow A_{s'}(x_1 \cdots, x_n)$$

这里的S'也称作相对于S和A的可构成壳，或更详细地称作相对于S和A的莱文海姆——斯科伦壳。这一定理上述形式的证明是可以在ZF中实现的，它不需要用到选择公理。

5. 可构成公理在L中成立

在给出连续统假设在L成立时，需要用到下述命题：每一个集合都是可构成的，亦即$\forall x(x \in L)$这就是$\forall x \exists \alpha (x \in M_\alpha)$。在文献中人们往

往往称这一命题为可构成公理。由于全域（即由所有集合构成的域）常常用 V 表示，而可构成域用 L 表示。自然有 $L\subset V$，可构成公理说 $V\subset L$。因此，人们也常常用 $V=L$ 表示可构成公理。本节的目的是在ZF中证明 $(V=L)_L$，亦即证明 $(\forall x\exists\alpha(x\in M_\alpha))_L$，也就是证明 $V=L$ 在 L 中成立。当我们注意到类的相对化就是刻画它的公式的相对化所定义的类时，就有：

$$V_L=\{x|x=x\wedge x\in L\}$$

亦即，$V_L=L$，因为 $V=\{x|x=x\}$，而且 $(V=L)_L$，等价于 $V_L=L_L$，这样，为了实现本节的目标只需证明：$L_L=L$ 就可以了。为此，我们考察在构成 L 的过程中所使用的基本概念、运算和关系，并考察它们的特征。首先需考察下述概念、运算和关系。

1) $x\in y$

2) $x=y$

3) $x\subset y$

4) $x=\phi$

5) $z=\{x, y\}$

6) $z=\langle x, y\rangle$

7) $z=x\times y$

8) $y=\bigcup x$

9) x 是一关系

10) x 是一函数

11) x 是一序数

12) $x=\omega$

上述1）—3）称之为关系，5）—7）称之为运算，由已知集合x，y产生的集合z分别称为x与y的无序对、有序对和卡氏积，8）也是一运算，y称为x的并集合。9）—11）是概念，借以刻画集合x的性质，都可以由一公式表示。例如，“x是一关系”可由公式“$\forall u(u\in x\longrightarrow\exists y\exists z(u=\langle y,z\rangle))$”表示。4）和12）也是概念，已是由公式表示的概念。这样，1）—12）都可以看作是公式。

回顾我们曾经给出了传递集合（类）的概念。集合S满足条件：对于任意的x，y，若$x\in y$且$y\in S$，则$x\in S$，就称S是传递的。

对于给定的公式$A(x_1,\cdots,x_n)$，变元x_1，$\cdots$，x_n在其中自由出现，并且无其它变元在其中自由出现。若对于任意的y_1，$\cdots$，$y_n\in S$，都有

$$A(y_1,\cdots,y_n)\longleftrightarrow A_S(y_1,\cdots,y_n)$$

成立，其中A_S仍为把A中的所有量词都替换为受囿于S的相应的量词，则称$A(x_1,\cdots,x_n)$为绝对的，A表示的概念（或关系或运算）也称之为

绝对的。

容易验证，上述1）—12）都是绝对的，以$x \subset y$为例，$x \subset y$的含义是“对于任一对象z，若$z \in x$，则$z \in y$。”令$x \in S$，因为$z \in x$，所以，据S的传递性必有$z \in S$。当x，$y \in S$，且$x \subset y$不成立时，就必有$z \in y$且$z \notin x$，由S的传递性，也有$z \in S$。这样，对于任意的x，$y \in S$，$x \subset y$成立与否，只需在S中考察它就够了。这就是说，$x \subset y$是绝对的。又如，对于任意的x，$x \in S$，若x是一关系，则对于任意的$u \in x$，都有对象y，z使得$u = \langle y, z \rangle$成立。这时显然有$u \in S$，且$y \in \bigcup\bigcup u$，$z \in \bigcup\bigcup u$，因此，也有y，$z \in S$，这就说明仅需在S中考察它就够了，因此，它是绝对的。

存在着非绝对的概念、运算和关系，一个最常见的例子就是幂集合运算，这是由于当$x \in S$时，x的元素都在S中，然而x的子集合就不一定在S中了。

顺便指出，我们曾经论及直谓的概念，它与绝对概念有什么联系呢？不难看出，凡是绝对的都一定是直谓的，然而，反之不然。

下面继续考察在构成L的过程中所出现的概念、运算与关系及它们的性质。

13) $y=x'$，其中x'为x的所有可定义子集合与x的并集合。

14) $y=M_a$

15) $x\in M_a$

遵循上述论证方法，虽然有些烦琐与冗长，人们可以论时13）—15）都是绝对的。这样，我们就实现了在V中构做L与在L中重新实施上述构做过程，构做L也是一样的；也就是说$L_L=L$，从而我们完成了在ZF中证明$(V=L)_L$。

6．在ZF中可证明$V=L\to \mathrm{AC}\wedge \mathrm{CH}$

首先证明：$V=L\longrightarrow \mathrm{AC}$，也就是证明在$L$中选择公理成立。由于选择公理与良序定理是等价的，因此，只需证明在L中良序定理成立。

容易证明，若x是良序的，则x'也是良序的。因为ZF公式是可数多个，不妨列举为

$$A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots \qquad (9\cdot 6)$$

显然，不同的公式可以定义x的同一子集合，然而同一公式可以有不同的参数，当公式相同且参数相同时只能定义同一集合，同一公式参数不同时可以定义不同的集合，也可以定义相同

的集合。

由x的良序，对于任意自然数m，可以做出x的m有序数组$\langle y_1, \cdots, y_m\rangle$的良序，其中，$y_i \in x$，$1 \leqslant i \leqslant m$，对于式（9·6）中任意给定的公式$A_j$，$A_k$，当$j<k$并且$A_j$，$A_k$定义的集合对于一切$r<j$，$r<k$时，$A_r$都不能够定义它时，$A_j$定义的集合都规定为在$A_k$定义的集合之前。而对于同一公式$A_j$中两组不同参数所定义的两个不同的集合，参数组在前的定义的集合在前，参数组在后的所定义的集合在后。例如，当A_j中的参数为m个时，且对于$y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_m \in x$，在数组的良序中有$\langle y_1, \cdots, y_m\rangle$，在$\langle z_1, \cdots, z_m\rangle$之前，这时，令

$$S_1 := \{z \mid z \in x \wedge A_x(z; y_1, \cdots, y_m)\}$$

$$S_2 := \{z \mid z \in x \wedge A_x(z; z_1, \cdots, z_m)\}$$

有S_1在S_2之前。不难证明，如此就获得了x'的一个良序。

对于任意的序数α，β，若$\alpha<\beta$，我们规定M_α中元素都在$M_\beta - M_\alpha$中元素之前。由上述论证，运用超穷归纳法我们就获得了L中一个良序，从而在L中AC成立。

现在，我们来证明连续统假设在L中是成立的。

为此，我们首先来回顾几个重要的概念。任一集合 S，如果其中任意两个元素 x，y，$x\neq y$就蕴涵着在 S 中存在 z，使得$z\in x$ 且 $z\notin y$，或者$z\in y$且$z\notin x$，则称 S 为外延集合。

例如：$\{\{2\},\{3\}\}$不是外延的。因为其中$\{2\}$，$\{3\}$为不同的两个元素，然而在其中却没有一个元素 z，使得 z 属于其中之一而不属于另外一个。集合$\{3,\{3\}\}$和$\{1,2,3,\{2\},\{3\}\}$都是外延的。前者 3 与$\{3\}$不相等是据 $3\notin 3$，$3\in\{3\}$而验证；后者，1 与2 不相等是据 $1\notin 1$，$1\in 2$ 而验证；1 与 3 不相等是据 $2\notin 1$，$2\in 3$ 而验证；2与3不相等是据 $2\notin 2$，$2\in 3$ 而验证；1与$\{2\}$ 不相等是据$2\notin 1$，$2\in\{2\}$而验证；2与$\{2\}$不相等是据$1\in 2$，$1\notin\{2\}$ 而验证；3 与$\{2\}$不相等是据$1\in 3$，$1\notin\{2\}$而验证；类似地还可以验证 1，2，3，$\{2\}$分别与$\{3\}$不相等。

任一集合 S，若当对于 S 中任一元素 x，且对 x 中任一元素 y 而言，都有$y\in S$，则称 S 为一传递集合。

外延集合比传递集合的概念更广一些。上述两个外延集合都不是传递的，然而不难验证，任意的传递集合都是外延的。关于外延集合，我们还有下述性质：

1）外延公理在其中成立的集合是外延的；

2）任一外延集合 T，都存在唯一的传递集合 S，和唯一的一对一的函数 f，使得 f 是 T 与 S 的一个 $\in$ 同构对应。亦即，f 是 T 与 S 之间的一个一一对应的函数，并且对于任意的 x，$y\in T$，都有：

$$x\in y\longleftrightarrow f(x)\in f(y)$$

上述性质的证明是不难的，读者可以自己给出。

由于选择公理在 L 中成立，因此，有 $\overline{\overline{x'}}=x$，并且对于任一序数 α，都有 $\overline{\overline{M_\alpha}}=\overline{\overline{\alpha}}$。

现在，我们来证明下述定理。

定理　对于任意的无穷序数 α，若 $\alpha\in M_\alpha$，$y\subset x$，则有序数 β，使得 $\overline{\overline{\beta}}=\overline{\overline{\alpha}}$ 且 $y\in M_\beta$。

证明　现在令 α 为一无穷序数，$x\in M_\alpha$，$y\subset x$，取令序数 δ，使得 $y\in M_\delta$。并且令

$$S=\bigcup\{M_\alpha,\ \{M_\delta\},\ \{\delta\},\ \{y\}\}$$

显然，$\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{\alpha}}$。令 A 为“β 构造 M_β”与外延公理。因为“β 构造 M_β”意味着：“β 是一序数，存在一函数 f，对于每一序数 $\gamma<\beta$，f 对 γ 都有定义，即 f 的定义域为 β，使得对于每一序数 γ，$f(\gamma)=(\bigcup\{f(\gamma_1)\mid\gamma_1<\gamma\})'$ 且 $f(\beta)=M_\beta$，”

所以，A为 ZF 中一命题，由 S 出发对这一命题应用于莱文海姆——斯科伦定理，就获得一外延集合 T，使得 $\overline{\overline{T}} = \alpha$，$M_\alpha \subset T$，$M' \in T$，$\delta \in T$，$y \in T$，且命题"$\beta$ 构造 M_β"在 T 中成立。

运用上述外延集合的性质 2，就存在唯一的传递集合 u 和它们之间的唯一的 $\in$ 同构对应 φ。因为 M_α 是传递的，φ 在 M_α 上是恒等映射。这样，$\varphi(x) = x$，$y \subset x$，$\varphi(y) = y$。当然，φ 对 β 未必是恒等的。令 $\varphi(\delta)$ 为某一序数 β。因为 β 相对于 u 来说是一序数，又由于序数概念的绝对性，所以，实际上，β 也是一序数，由 u 的递归性，有 $\beta \subseteq u$。因此，$\overline{\overline{\beta}} \leqslant \overline{\overline{u}}$，这样，因为 $\overline{\overline{u}} = \overline{\overline{\alpha}}$，所以 $\overline{\overline{\beta}} \leqslant \overline{\overline{\alpha}}$。又因为"$y \in M_\beta$"相对于 u 成立，并且由 $y \in M_\beta$ 的绝对性，就有 $z \in M_\beta$ 成立，这就完成了上述定理的证明。

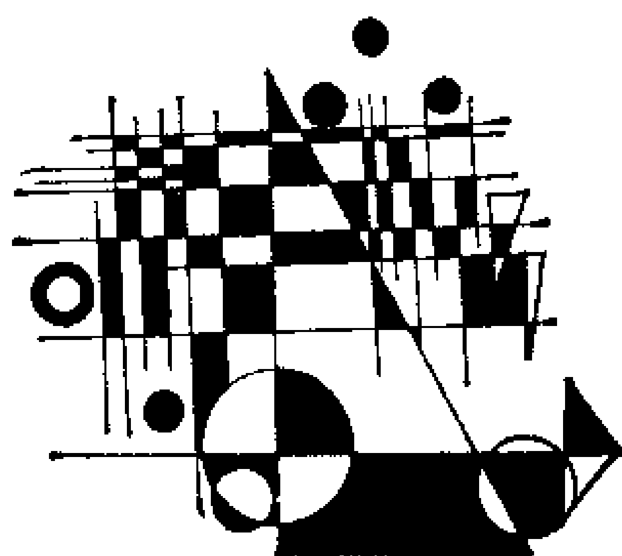
由上述定理，并注意到：已经有 $\omega \in M_\omega$，对于每一集合 $y \subset \omega$，都有一可数序数 β，使得 $y \in M_\beta$，由于可数序数的数目为 $\aleph_1$，当 α 为可数序数时，有 $\alpha \in \omega_1$，记住 ω 的有穷子集合，都是有穷步构造的。这样，我们就有 $P(\omega)$ 到 ω_1 的一个内射对应，从而有，$\overline{\overline{P(\omega)}} \leqslant \aleph_1$。又因 $\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{P(\omega)}}$，所以有 $\overline{\overline{R}} = \aleph_1$。

综上，我们有：$V = L \longrightarrow \mathrm{AC} \wedge \mathrm{CH}$

由于，我们已经证明了，ZF 在 $\boldsymbol{L}$ 中成立，$V=\boldsymbol{L}$ 在 L 中成立，从而我们获得了 $\boldsymbol{L}$ 是选择公理与连续统假设的一个模型。

总之，我们已经完成了哥德尔相对协调性的证明。

十 连续统假设的相对独立性



本章的目的是简要地说明科恩1963年对连续统假设所作出的重大贡献。

1. 初始模型

前一章中，我们从假定 ZF 协调出发，构造出一个可构成模型 L，并且有

$$L \models ZF + V = L + AC + CH$$

L 中的序数与 V 中的序数相同。也就是说，虽然 L 是 V 的一个真子部分，然而二者的序数类是相同的。莱文海姆斯科伦定理有一个重要的形式就是如果形式语句的一集合有模型，则它就有一模型，它的基数为此语句集合的基数与$\aleph_0$的较大者。由于 ZF 的定理集合的基数为$\aleph_0$，所以，据

这一定理，我们就有一可数标准模型M，使得

$$M \models ZF + V = L + AC + CH \qquad (10\cdot1)$$

并且可以假定M就是L的一初始段，也就是说，有一可数序数α_0，使得

$$M = \bigcup \{M_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\} \qquad (10\cdot2)$$

其中M_α为由式（9·2）给出的可构成集合（图10·1），在这里α_0起着全域中序数类O_n的作用，α_0称为M中序数的最小上界。虽然每一个小于

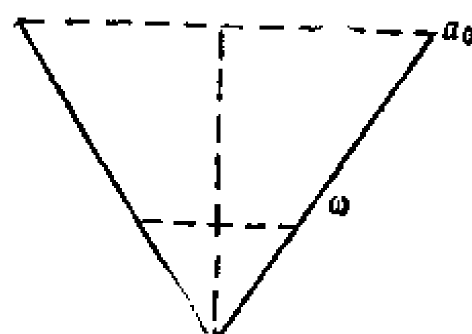


图10.1 初始模型M的示意图

α_0的序数都是可数的，然而在M中它们却可以扮演ω_1，ω_2，…，ω_3，…，等重要的角色。由于M是可数的，M中ω的所有子集合当然也是可数的。因此，有大量的集合x，$x \subset \omega$并不在M中。

我们还可以假定M是传递的，这就是说，任一$x \in M$，有$x \subset M$。这样做是由于外延公理在M中成立，使用前一章讲的外延集合的性质就可以获得与它具有$\in$同构的传递模型。

根据科恩的工作，我们还可以假定M具有极小性质，也就是说，如有另外一个满足式(10·1)的传递可数标准模型M_1，则有 $M\subset M_1$ 成立。如上描述的模型M就是本章的出发点，即初始模型。

2. 力迫关系与脱殊集合

前面已经指出，满足条件：

$$x\notin M 且 x\subset\omega \tag{10·3}$$

的集合x还有很多，有不可数多个，不过其中有的是ZF可定义的，比如a_0的自然良序所对应的集合就是ZF可定义的，当把这一集合加入到M时就破坏了M的性质，它不能再满足式（10·1）所刻画的性质了。我们现在需要着重讨论的是既满足式（10·3）又是ZF不可定义的集合x。为此，我们引进下述概念。

令L_1为与M相对应的一可数形式语言和L_1的所有语句的一个枚举。令a是满足式（10·3）的某一集合，类似于代数学中的未知数，a也是一待求的集合，把a作为参量，按照通常的方法可以由a加入L_1就诱导出L_1的扩充语言$L_1(a)$，并简

记做L_1，以及由此诱导出一个扩充的结构$M(a)$，枚举L_1中的所有语句为

$$A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots\cdots \qquad (10\cdot4)$$

当我们一旦选定集合$a\subset\omega$时，$M(a)$中所有的语句，相应地L_1中所有语句都或者是真的，或者是假的了。由于$0\in a$，$1\in a$，…，$n\in a$以及它们的否定式都在式(10·4)中，它们也总是或者真的或者假的，问题在于如何去确定集合a了。因此，我们的第一个目标是去寻找具有适当性质的a，例如，我们希望寻找$a\subset\omega$，使得$M(a)\models$ZF，且a不可构成，从而就证明可构成公理$V=L$相对于ZF是独立的了。

虽然，我们假定了L_1具有指称$M(a)$的对象的手段。然而，因为a尚未给出，并且a不在M中，所以，在L_1中我们没有直接的方法去论究a。不过对于a的任意有穷前节来说，在L_1中自然是可以被论究的。

我们将把a中的有穷信息量即有穷前节称为力迫条件，并记做p。对于力迫条件p来说，可以把它看做是一函数，即有一自然数n，n为p的定义域，$p:n\longrightarrow\{0,1\}$。当$i<n$，$i\in a$当且仅当$p(i)=1$。当$p$、$q$均为力迫条件时，我们说$p\subset q$（$q$包含$p$），指函数意义的包含关系，即设

p的定义域为n，q的定义域为m，就有$n \leqslant m$。

对于L_1中任一语句A_n，它总可以依据模型M与某一力迫条件p（即a的有穷信息量）而建立A_n的真假值。而且当A_n的真值一旦建立后，不管A_n为真为假当p的有穷信息量扩充到任意有穷信息量q时，A_n的真值就不再变化了，不受任何影响了。继续上述过程，我们就可以获得L_1中一切语句的真值了，也就是建立了结构$M(a)$当然，并非对于每一个集合$x \subset \omega$，都能够用这种方法获得L_1中每一语句A_n的真值，能够这样做的ω的子集合叫做脱殊集合。

为了具体地说明由力迫条件决定L_1中语句的真值，我们建立力迫条件p对L_1中语句A的力迫关系，这一定义是基于A的复杂性归纳地建立的。按通常记法，我们用$p \Vdash A$表示p力迫A。

1）$p \Vdash x \in y$　当且仅当$x \in y$；

2）$p \Vdash n \in a$　当且仅当n在p的定义域中且$p(n) = 1$；

3）$p \Vdash B \wedge C$　当且仅当$p \Vdash B$且$p \Vdash C$

4）$p \Vdash B \vee C$　当且仅当$p \Vdash B$或$p \Vdash C$；

5）$p \Vdash B \longrightarrow C$　当且仅当$p \Vdash \neg B$或$p \Vdash C$；

6）$p \Vdash \neg B$　当且仅当，对于每一力迫条

件q，若$p \subset q$，则$q \Vdash B$。

其中$q \not\Vdash B$指q不力迫B，即$q \Vdash B$不成立。

7）$p \Vdash \exists x B(x)$　当且仅当有L_1中一个体b，使得$p \Vdash B(b)$；

8）$p \Vdash \forall x B(x)$　当且仅当，对于L_1中所有的个体b，都有$p \not\Vdash \neg B(b)$。

当我们把力迫关系理解为一种真值定义时，这一定义与通常的真值定义不同的地方主要在上述情况6.$p \Vdash \neg A$，在于p的任意有穷扩充都不能力迫A。当我们作出进一步论证时，不难证明力迫关系有下述性质：

1）对于任意力迫条件p和L_1中任一语句A，都不能有：$p \Vdash A$且$p \Vdash \neg A$。

2）若$p \Vdash A$，且$p \subset q$则$q \Vdash A$。

3）任一力迫条件p和L_1中语句A，有力迫条件q，$p < q$，使得或者$q \Vdash A$，或者$p \Vdash \neg A$。

由上述力迫关系的定义和性质1—3，不难证明存在力迫条件序列：

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots\cdots \qquad (10\cdot5)$$

使得对于每一自然数i，j，若$i < j$，则$p_i \subset p_j$，并且对于式（10·4）中每一公式A_n，都有自然数m，有$p_m \Vdash A_n$或者$p_m \Vdash \neg A_n$。

满足上述性质的力迫条件序列即式（10·5）

我们称之为完备序列，由完备序列我们可以定义一集合

$$a_0:=\{i|有m使得(p_m(i)=1)\} \quad (10\cdot6)$$

上述定义的集合a_0叫做脱殊集合．完备序列的存在性就决定了脱殊集合的存在性．由式(10·4)给出的L_2的语句的枚举和初始的力迫条件决定了完备序列式(10·5)．由之产生了据式（10·6）而获得的脱殊集合．当这些条件变化时，又可获得不同的脱殊集合．甚至，当我们在作形式语言L_2中可以用更多的待定符号，我们就可以获得同样多的特殊集合．由于我们的论证（即工作模型）是在M中进行的，因此，对于任意序数$\tau>1$，我们可以同时产生出ω_τ个脱殊集合．

为什么能有如此多的脱殊集合呢？这是因为一方面ω有不可数多个子集合，另一方面，L_2是一可数的形式语言．因此，L_2必然要留下大量的不确定的东西，L_2能描述的实际上只是一些特殊的集合．正如整数系数的代数方程也只是一个可数语言，由这种方程所定义的代数数也只能是可数多个，这就留下了大量的不确定的实数（超越数）需用其它方法加以描述．而一脱殊集合的基本性质在于L_2中每一个语句A的真值都是由脱殊集合的有穷前节所决定的．因此，不难获得，它与可

构成集合是很不相同的，它摆脱了形式系统的特殊性质，这就是"脱殊"一词的含义。

3. 脱殊集合的性质

本节我们陈述并直观说明脱殊集合的一些基本性质，从力迫关系出发，直接证明这些性质也是不难的，也可参阅文献〔4〕.

1）对于任意的有穷集合 $x\subset\omega$，都存在一脱殊集合 y，使得 $x\subset y$.

不妨取 x 中最大元加 1 为力迫条件 p_0 的定义域，$p_0(i)=1$ 当且仅当 $i\in x$。以 p_0 为出发点去构做满足式（10·5）的完备序列，由这完备序列定义的脱殊集合 y，显然有 $x\subset y$。

2）一脱殊集合 y 的每一个 ZF 可定义的子集合 x 都是有穷的。

因为 $x\subset y$ 成立，就有一力迫条件 $p\Vdash x\subset y$，然而 x 为可定义集合，即有ZF公式 $A(u)$，使得

$$u\in x\text{当且仅当}A(u)$$

因此，我们有 $p\Vdash\forall u(A(u)\longrightarrow u\in y)$. 这样，对于每一自然数 n，若 $p\Vdash A(n)$，则 $p\Vdash n\in y$，而

后者据力迫关系的定义中的第2项，就说明n在p的定义域中，这样，x就只能为有穷集合了。

3）每一脱殊集合都是无穷的。

设y为任一脱殊集合，使用反证法和力迫关系的性质3不难证明命题

$$\forall x_1 \in \omega,\ \exists x_2 \in \omega (x_1 < x_2 \wedge x_2 \in y)$$

也就是说y为一无穷集合。

4）每一脱殊集合都是ZF不可定义的。

这一性质可直接从上述性质2获得。

5）若x是M中ω的一无穷子集合，y是脱殊集合，则$x \cap y$为一无穷集合。

6）若y_1，y_2为两个不同的脱殊集合，则有

（1）$y_1 \not\subseteq y_2$且$y_2 \not\subseteq y_1$；

（2）$y_1 \cap y_2$为一无穷集合；

（3）$y_1 - y_2$与$y_2 - y_1$均为无穷集合。

上述性质5—6的证明可参阅文献[4]。

4. CH不成立的模型

从初始模型出发，增加进去ω_2个不同的脱殊集合，并且不仅要保证结果模型的传递性，而且要求结果模型只是加宽而不增高。比如，我们增

加到M中的脱殊集合有

$$\{Y_\lambda | \lambda < \omega_\tau\}$$

这样，我们为保持结果模型的传递性，就要增加进去下列集合：

1）对于每一$\lambda < \omega_\tau$，集合$\{\lambda\}$，$\{Y_\lambda\}$，$\{\lambda, Y_\lambda\}$，$\langle\lambda, Y_\lambda\rangle$；

2）集合$\{\langle\lambda, Y_\lambda\rangle | \lambda < \omega_\lambda\}$；

并且要把上述集合进行如同M那样的累积过程。例如，为了简便起见，不妨把上述1，2中所给出的集合搜集在一起组成集合G，令W为G的传递闭包，而结果模型作如下的定义：

$$M_0(G) := W$$

$$M_\alpha(G) := (\bigcup\{M_\beta(G) | \beta < \alpha\})'$$

$$M(G) := \bigcup\{M_\alpha(G) | \alpha < \alpha_0\}$$

其中由x到x'的结果是x的所有可定义子集合与x之并，α_0是初始模型M的最小上界。

对于$M(G)$，显然有$M \subset M(G)$，并且两者序数相同。不难证明：

1）$M(G) \models$ ZFC，亦即$M(G)$为ZFC的一模型；

2）令α，β是M中二个序数，如果在M中有$\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}}$成立，则在$M(G)$中有$\overline{\overline{\alpha}} < \overline{\overline{\beta}}$成立；

这一性质说明，M中的基数恰好就是$M(G)$

中的基数，又由于对于任意序 $\lambda<\omega_\tau$，y_λ 为 ω 的互不相同的子集合，因此，我们就有

3）在$M(G)$中，有 $\aleph_\tau \leqslant \overline{P(\omega)}$，换句话说，在$M(G)$中连续统假设不成立；

在对序数 τ 作进行分类并作仔细地推演后就获得下述结果。

4）在$M(G)$ 中，如果 τ 与 ω 在M中是不共尾的，则$2^{\aleph_0}=\aleph_\tau$；如果 τ 与 ω 在M中是共尾的，则$2^{\aleph_0}=\aleph_{\tau+1}$。

我们曾经指出，由蔻尼定理，$2^{\aleph_0}$不能是可数个更小基数的和，$2^{\aleph_0}\neq\omega_\omega$，由此不难获得对于任意的与 ω 共尾的序数 α，都有

$$2^{\aleph_0}\neq\aleph_\alpha$$

当我们在引入无穷多个脱殊集合，并运用置换群的工具，就可以构做另一结果模型，使得在其中AC不成立。

还应当特别注意的是，在证明上述性质的过程中，总是把$M(G)$ 中的性质，通过力迫关系在M中的可定义性质还原到M中进行论证，这表现了力迫方法在独立性证明中的强有力的作用。这样，我们有必要对力迫概念再作一些通俗的说明。

5. 力迫方法浅释

为了形象、直观、鲜明起见，我们用丰满的ω层二枝树来表示ω的所有子集合(图10.2)，就是说，图10.2中任一枝都表示ω的一个子集合。这一树中，A点为树根，生长出二个树枝，左边

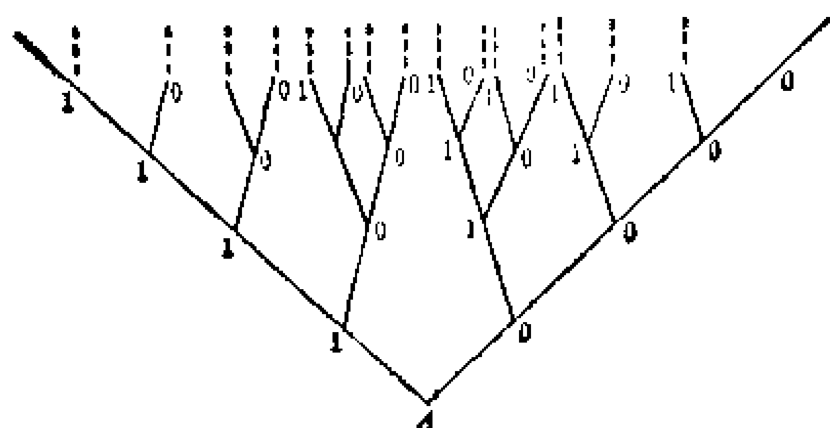


图10.2 丰满ω层二枝树

的第一个节点标上数1，右边的第一个节点标上数0，并且在每一节点上继续长出二个杈，然后在它们的节点上分别标上数1或0，向左的标上数1，向右的标上数0，以此类推地无穷地进行下去，即获得丰满的ω层的二枝树。每一树枝都恰有ω层，当它的第n层是标以数1时，表示n

属于此枝的对应集合，否则，即它的第n层标以数0时，就表示n不属于此枝的对应集合。由此，可知这一树的最左边的枝表示ω，最右边的枝表示空集合ϕ。读者不难验证按照这一对应方法，这一树与集合$P(\omega)$是一一对应的，由枝到ω的子集合与由ω的子集合到树枝都是唯一确定的。

如前指出，在M中只含有$P(\omega)$的可数个子集合，有大量的ω的子集合不在其中，并且是脱殊的，当然脱殊集合的任一前节都是有穷集合，从而都在M中。可以设想，一脱殊集合对应的树枝不妨称为脱殊枝。

每一树枝的有穷前节都表示一力迫条件，因为这样的前节实际上也就是定义域为n并且值域为{0，1}的一函数。这样，一脱殊枝的前节就可以写做p_0，p_1，p_2，…，p_n，……，并且当$i<j$时，有$p_i\subset p_j$，对于L_2中每一语句，必有自然数m，使得$p_m\Vdash A$或者$p_m\Vdash\neg A$。当前者成立时，A在$M(G)$中真，当后者成立时，A在$M(G)$中假。这样，M连同有穷信息量p_m就决定了A的真值。在M中我们无法刻画脱殊树枝本身，然而却可以抓住它的前节p_m，并且在M中也能够抓住$p_m\Vdash A$与$p_m\Vdash\neg A$（注意，二者不能同时为真。）

从而在M中我们就抓住了语句A的真值。这里所谓能够在M中抓住 $p\Vdash A$ 是指这一关系在M中是可以定义的，并且定义它的关系是绝对的，这一点的论述是不难的，然而是冗长的和烦琐的。

此外，力迫关系 $p\Vdash A$ 的定义，我们仅给出了它的要点，再详细一点说，因为L_1是一个层次语言，应当有语句A的层次，由于A可能出现α层次的对象($\alpha<\alpha_0$)，因此，A的层次也应当是分支型的。这样，在我们的论证中就含有分支类型论的思想，鉴于对分支类型论我们已作了专门的论述，这里就不再重复了。

6. 莱文海姆—斯科伦定理浅释

这一定理在前一章和本章的论证中多次运用了它，并且起着关键的作用，因此，有必要作一通俗的例证。我们仅考察本章节1中给出的形式中的一个语句。

首先，我们考察一阶逻辑的一些基本性质，这些性质对于我们在第七章引进的集合论演算也是完全适用的。我们将用符号“$\vdash\dashv$”表示双推演性，就是说，“$A\vdash\dashv B$”表示从A可以推出B，

并且从 B 可以推出 A。下边假定 $A(x)$、B 为ZF公式，x 在 $A(x)$ 中自由出现，x 在 B 中是不自由出现的。我们有下述性质：

1）$\neg\forall xA(x) \vdash\dashv \exists x\neg A(x)$

2）$\neg\exists xA(x) \vdash\dashv \forall x\neg A(x)$

3）$\neg\forall x\neg A(x) \vdash\dashv \exists xA(x)$

4）$\neg\exists x\neg A(x) \vdash\dashv \forall xA(x)$

5）$\forall xA(x)\wedge B \vdash\dashv \forall x(A(x)\wedge B)$

6）$\exists xA(x)\wedge B \vdash\dashv \exists x(A(x)\wedge B)$

7）$\forall xA(x)\vee B \vdash\dashv \forall x(A(x)\vee B)$

8）$\exists xA(x)\vee B \vdash\dashv \exists x(A(x)\vee B)$

9）$\forall xA(x)\longrightarrow B \vdash\dashv \exists x(A(x)\longrightarrow B)$

10）$\exists xA(x)\longrightarrow B \vdash\dashv \forall x(A(x)\longrightarrow B)$

11）$B\longrightarrow\forall xA(x) \vdash\dashv \forall x(B\longrightarrow A(x))$

12）$B\longrightarrow\exists xA(x) \vdash\dashv \exists x(B\longrightarrow A(x))$

上述12条性质是不难证明的，这里从略。根据这12条性质，我们都可以在有穷步骤内，把ZF的任一公式化成与它等价的前束范式。这一公式如果具有下述形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nC(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (10\cdot7)$$

其中 Q_i 或为全称量词 $\forall$ 或为存在量词 $\exists$，并且 C 中不再出现任何量词时，则称式（10·7）为一前束范式。也就是说，对于任一公式 A_1，都有一

前束范式 A_1，使得：$A_1 \vdash\dashv A_2$。由此，我们在证明莱文海姆——斯科伦定理时，只需考察具有前束范式形式的公式就够了。不失一般性，我们不妨假定公式$A(t)$具有形式

$$\exists x \forall y \exists z \forall u B(x, y, z, u, t) \quad (10\cdot8)$$

t 在其中自由出现，没有其它变元在其中出现，B 中无量词出现。对于给定集合S，现在我们定义一元函数f，其定义域为S，并满足性质：对于任意给定的$t \in S$，如果存在一集合x（不要求x在S中），使得

$$\forall y \exists z \forall u B(x, y, z, u, t) \quad (10\cdot9)$$

成立，则选择适当的集合x，且令$f(t)=x$；如果不存在x，使得式（10·9）成立，则令$f(t)=\phi$。

由于式(10·9)是以全称量词开始的，因此仅需考察它的否定式：

$$\exists y \forall z \exists u \neg B(x, y, z, u, t) \quad (10\cdot10)$$

现在定义二元函数g，其定义域为$S \times S$，对于任意给定的t，$x \in S$，如果存在集合Y（不要求在S中），使得

$$\forall z \exists u \neg B(x, y, z, u, t) \quad (10\cdot11)$$

成立，则选择适当的集合Y，且令$g(x,t)=Y$；如果不存在Y，使得式（10·11）成立，则令$g(x,$

t）$=\phi$。同样，由于式（10·11）是全称量词开始的，因此，考察它的否定式：

$$\exists z \forall u B(x, y, z, u, t) \quad (10 \cdot 12)$$

现在定义三元函数 h，其定义域为 S^3，对于任意给定的 x、y、$t \in S$，如果存在 z（不一定在 S 中），使得

$$\forall u B(x, y, z, u, t) \quad (10 \cdot 13)$$

成立，则选择适当的集合 z，且令 $h(x, y, t)=z$；如果不存在 z，使得式（10·13）成立，则令 $h(x, y, t)=\phi$。同样，由于式（10·13）是全称量词开始的，因此，考察它的否定式：

$$\exists u \neg B(x, y, z, u, t) \quad (10 \cdot 14)$$

现在定义四元函数 φ，其定义域为 S^4，对于任意给定的 $x,y,z,t \in S$，如果存在集合 u，使得：

$$\neg B(x, y, z, u, t) \quad (10 \cdot 15)$$

成立，则选择适当的集合 u，并令 $\varphi(x, y, z, t)=u$。如果不存在 u，使得式（10·15）成立，则令 $\varphi(x, y, z, t)=\phi$。

令 S^* 表示 S 与函数 f，g，h，φ 在上述定义域上值域之并集合，并且令

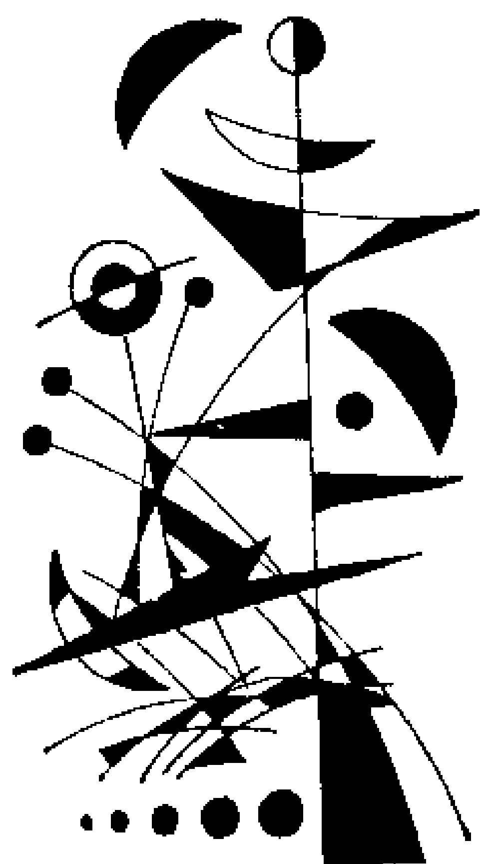
$$S_1 := S$$

$$S_{n+1} = S_n{}^*$$

$$T = \bigcup \{S_n | n \in \omega\}$$

我们不妨假定上述出发点集合S为一可数集合，这一定理的证明中已使用了选择公理，再次运用它，显然T也是可数的，并且不难看出，若A有模型，则A就有可数模型T。对于语句集合的情况，仅需再增加一些技术细节就可获得欲证结果，这里从略。

十一 CH还是一大难题



1. ZF系统的不完全性

在前两章中，我们已经证明了

$$ZF \nvdash \neg CH 且 ZF \nvdash CH。$$

这就是说，ZF系统既不能断定CH成立，也不能断定它不成立。当我们把ZF的可证明语句（即定理）搜集在一起组成集合T（即T为ZF的定理集合），而把ZF的可驳语句（即可否证的语句，或它的否定式是可证的）搜集在一起组成集合R，亦即

$$T := \{A \mid ZF \vdash A 且 A 为ZF语句\}$$

$$R := \{B \mid ZF \vdash \neg B 且 B 为ZF语句\}$$

上述结果说明CH既不在T中，也不在R中（见图11·1），也就是说，CH是ZF的一个不可判定

的语句。事实上，选择公理，即 AC 也是既不在 T 中，也不在 R 中，这就说明了 ZF 是不完全的。

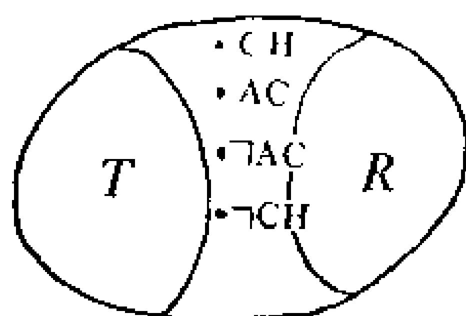


图11·1　ZF系统的不完全性

我们可以把ZF加以扩充，把AC 作为公理之一，与 ZF 一起组成公理系统 ZFC。前两章的结果表明CH在 ZFC 中仍然是不可断定的，也就是说，CH 仍然是系统 ZFC 的一个不可判定的语句。具体地说，若置

$$T^C := \{A \mid \text{ZFC} \vdash A \text{且} A \text{为ZF语句}\}$$

$$R^C := \{B \mid \text{ZFC} \vdash \neg B \text{且} B \text{为ZF语句}\}$$

那末，CH既不在T^C中，也不在 R^C中。并且我们已经说明可构成公理V = L 也是 ZFC 的一个不可断定语句。而蔻尼定理则断定，当 α 与 ω 不共尾时，就有$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha$。换言之，$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha$在 R^C中，$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha$在$T^C$中。

2. 问题并未解决

有了科恩的结果之后，一些学者（包括科恩）都认为连续统问题已经解决了，并声称连续统假设成立的集合论为康托尔集合论，其它称为非康托尔集合论.但是，哥德尔等人认为问题并没有解决，有的人也公开批评科恩的观点是一种浮浅的看法。事实上，早在科恩1963年的结果出现之前二十五年，即1947年哥德尔就在文献〔9〕中指出：有可能CH在ZF中是不可判定的，并表述了他的深刻见解。早在1938年哥德尔已经公布了CH相对ZF的协调性结果，即若ZF协调，则ZF $\nvdash \neg$CH。在这一前提下，只能有或者ZF$\vdash$CH或者ZF $\nvdash$CH.而后者正是说明CH是ZF不可判定的。我们现在来考察哥德尔1947年的意见：

"康托尔连续统问题，不论采取什么哲学观点，不可否认地至少保持这个意义，去发现它是否有一个答案，如果有，那么是什么答案，是能从所引用的系统中所陈述的公理推导出来的。"

"自然，如果按这个方法解释，那么（假定

公理的协调性）对于康托尔猜测就先验地存在着三种可能性：它是可证明的，或是可否证的，或是不可判定的。”

如前所述，由哥德尔1938年的结果，不可能出现“可否证的”结论了，剩下的就是第一、第三两种情形了。

“第三种可能性（它不过是前述猜想的一种精确的表述，即问题的困难可能不是纯数学的）是可能性最大的一种。寻找它的一个证明，也许是当前着手解决这一问题的最有希望的途径。”

“但是，需要注意，根据这里所采取的观点，从所采取的集合论公理对康托尔猜测的不可判定性的证明(例如，对照 π 的超越性的证明)，决不是问题的解决。”当代集合论的学者们仍然坚持哥德尔四十多年前的观点，连续统问题并没有解决，仍然是当代数学的一个大难题。

3．连续统问题与集合论新公理

康托尔集合论是古典数学的自然推广。在数学中出现的集合有整数的集合，有理数（即整数的有序对）的集合，实数（即有理数集合）的集

合，实函数（即实数的有序对集合）的集合，等等，全部都在康托尔的集合论之中。集合的这种概念、这种形式或过程总是从整数，或某种完全确定的对象，迭代应用运算“……的集合”而得到的对象，就称之为集合，而不是通过把所有现成事物的总体分成两类而得到的某种东西，这样就永远不会导致任何悖论。正如哥德尔指出的：“关于这个集合概念的完全素朴的和无批判的工作，迄今为止已经证明是完全自协调的。”

连续统问题对于集合论，甚至对于基础数学是非常重要的。虽然经过了一百多年的发展，有了若干重大的进展，但至今它并未得到彻底的解决，这在某种程度上可归之于纯数学的困难。此外，哥德尔说：“看来这里还含有更深刻的原因，并且只有在对它们中出现的词项(如“集合”“一一对应”，等等）和支配这些词项的使用的公理的意义进行（比数学通常作的）更深刻的分析，才能得到这些问题的完全解决”。在哥德尔看来，如果我们所解释的集合论的原始词项的意义被认为是正确的话，那么就可以得出，集合论的概念和定理描述了某个完全确定的实在（即论域），在其中康托尔猜测必然或者是真的，或者是假的。“因此，从今天所采取的公理得出康托尔

猜测的不可判定性，只是意味着这些公理没有包括那个实在的完全描述。”当前集合论的研究，例如，强无穷公理（包括大基数公理）、对类的非直谓的概括公理，不仅清楚地表明，今天所使用的集合论公理系统是不完全的，而且也表明它是能不带任意地用新公理来补充的。这些新公理不过是上面所解释的集合概念的内容的展开。关于这种研究，哥德尔说：“可能存在就其证明的结果来说是如此丰富的其它公理，它照亮整个领域并产生这样强有力的解决问题的方法（并且，只要是可能的，甚至可以构造地解决它们），使得不论它们是否是内在必须的，至少应在如同任何已经完全建立的物理理论同等的意义上接受它的。”哥德尔在分析了与连续统问题有关的许多数学命题之后指出：

“与大量的蕴涵连续统假设的否定似乎真的命题相反，没有一个已知的似乎真的命题蕴涵连续统假设。”因此，在新的系统中，“有可能否证康托尔猜测。”

哥德尔四十年前的论断，仍然是当今集合论学者关心的课题。以斯拉为代表的一批学者提出了真常力迫的公理，并由此论证$2^{\aleph_0}=\aleph_2$。但是，真常力迫的公理是否具有公理的资格，也是当前

人们极为关注的问题。

研究集合论新公理，并非都是直接指向连续统问题的。大基数公理、对类的非直谓的概括公理虽然都极大地扩充了 ZF 系统定理的集合，它们都可以证明 ZF 系统的协调性，然而对 CH来讲，仍然是不可判定的。但是，新公理对建立ZF系统的协调性，扩充 ZF 的推理能力，这无疑是重要的。

我们对聚合公理系统的研究，除了上述的目的之外，还试图去概括当代数学的一个分支——范畴论的基础〔5〕。

十二 结束语



不仅数学家认为连续统是一个极端重要的概念，而且物理学家也是这样认为的。爱因斯坦在1946年12月14日致索末非尔德的信中曾说过：“我始终真诚地相信，从连续统出发阐明物理学的基础最终是会成功的，其所以如此，是因为不连续对于相对论的描述超短作用似乎没有提供任何可能性。”我们在第四章引用的希尔伯特的论述，清楚地表明了他对连续统的看法，即连续统问题来源于外部世界，外部世界是数学的源泉。

爱因斯坦与希尔伯特都从连续统与物理世界、外部世界相联系来看它的重要意义。希尔伯特还从离散与连续的关系方面论述康托尔猜想。他说，如果能证明康托尔猜想，那么，立即可以得出结论：“在可数集合与连续统之间架起一座新的桥梁。”

哥德尔是当代最伟大的逻辑学家，从逻辑史上看，他是亚里士多德以来一位最伟大的逻辑学家，他不仅对连续统问题作出了重大的贡献，指出了它的深刻意义与前景，而且对许多重大的逻辑问题、数学问题都作出了影响深远的工作。我们应当十分重视他对连续统问题的论述。连续统问题，不仅具有纯数学的意义，而且又是一个重要的逻辑格，它将成为探索未知世界的一个重要手段。我们深信，未来的数学家，逻辑学家将对连续统问题贡献自己的力量，作出科学的回答。

参考文献

〔1〕王宪钧，数理逻辑引论，北京大学出版社 1982。
〔2〕张锦文，集合论与连续统假设浅说，上海教育出版社，1980。
〔3〕张锦文，集合论浅说，科学出版社，1984。
〔4〕张锦文，公理集合论导引。（待出版）
〔5〕张锦文，聚合、序量与基量，数学学报，第26卷（1986），第2期，PP.217—223。
〔6〕钱宝琮，中国古代数学史，科学出版社。1964。
〔7〕P.J.Cohen, Set Theory and the Continuum Hypothesis, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1966.
〔8〕K.Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axiom of set Theory, Princeton, 1940.
〔9〕K. Gödel, What is Cantor's Continuum Problem? Amer.Math.Monthly, 54(1947), PP. 515—525.
〔10〕D.Hilbert, Mathematishe probleme, 1901, 中译本，见《数学史译文集》上海科学技术出版社，1981。

〔11〕M· Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, 1972.中译本，古今数学思想，上海科学技术出版社，1981。

〔12〕A·Levy, The Role of Classes in Set Theory, in: Sets and Classes by G·H·Müller (Ed.) 1976。

人 名 索 引

贝尔奈斯(Bernays, Paul 1888—1977)

韦利(Berry, G.G.)

牛顿(Newton, Isaac 1642—1727)

韦尔(Weyl, Hermann 1885—1955)

刘徽，我国魏晋时人

布劳维尔(Brouwer, Luitzen E.J. 1881—1966)

布拉里·弗蒂(Burali—Forti 1861—1931)

弗瑞格(Frege, Gottlob 1848—1 25)

甘岑(Gentzen, Gerhard 1909—1945)

车赤(Church, A 1903—)

冯·诺依曼(Von Neumann, J. 1903—1957)

毕达哥拉斯(Pythagoras, 约公元前585—500)

亚里士多德(Aristotle, 公元前 384—322)

芝诺(Zeno)

吕洛斯(Lüroth, Jacob 1844—1910)

伽利略(Galileo 1564—1642)

希尔伯特(Hilbert, Darid 1862—1943)

怀德海(Whitehead, Alfred North 1861—1946)

克林尼(Kleene, S.C. 1909—)

狄松(Dixon)

波尔查诺(Bolzano, Bernard 1781—1848)
欧几里得(Euclid)
罗素(Russell, Bertrand 1872—1970)
拉姆西(Ramsey,P·P· 1903—1930)
庞加莱(Poincaré, Henri 1854—1912)
阿克曼(Ackermann, Wilhelm 1896—1962)
科恩(Cohen, P·J· 1934—)
柯朗尼克(Kronecker, Leoplod 1823—1891)
哥西(Cauchy, Augustin—Louis 1789—1857)
高斯(Gauss, Carl Friedrich 1777—1855)
莱布尼兹(Leibniz, G·W· 1646—1716)
哥德尔(Gödel, Kurt 1906—1978)
维尔斯特拉斯(Weierstrass, Karl 1815—1897)
康托尔(Cantor, Georg 1845—1918)
蔡梅罗(Zermelo, Ernst 1871—1932)
理查德(Richard, Jules 1862—1956)
普洛克拉斯(Proclus 410—485)
彭色列(Poncelet, Jean—Victor. 1788—1867)
斯科伦(Skolem, Th· 1887—1963)
谢宾斯基(Sierpinski)
塔斯基(Tarski, A· 1902—1983)
蔻尼(König, J. 1849—1913)
豪斯道夫(Hausdorff, Felix 1868—1942)
德谟克利特(Democritus约公元前460—360)
鲁滨逊(Robinson, Abraham 1918—1974)
戴德金(Dedekind,Richard 1831—1917)